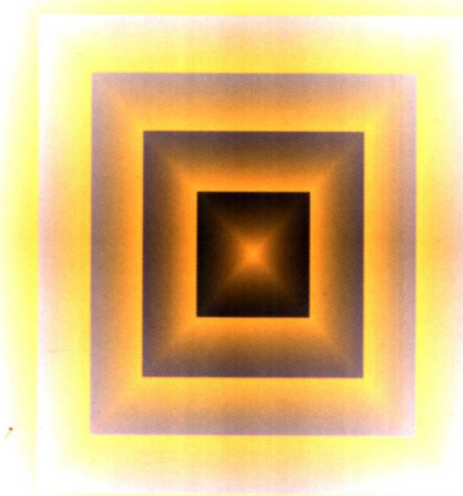
动力系统基础及其方法

西安交通大学数学研究生教学丛书

陈绥阳　褚蕾蕾　编著



科学出版社
www.sciencep.com

西安交通大学数学研究生教学丛书

动力系统基础及其方法

陈绥阳　褚蕾蕾　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

动力系统（Dynamical System）是拓扑空间上连续自映射迭代生成的系统. 本书重点阐述拓扑动力系统（含符号动力系统、分形动力系统），微分动力系统和无穷维动力系统的基础理论知识与基本研究方法. 这一理论与方法，已广泛而深入地应用于数学、统计学、物理、力学、信息与计算科学，以及许多工程领域.

本书可作为数学类各专业的研究生教材，也可供以上相关专业的高年级学生及教学、科研人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

动力系统基础及其方法/陈绥阳，褚蕾蕾编著. —北京：科学出版社，2002.9

（西安交通大学数学研究生教学丛书）

ISBN 7-03-010392-0

Ⅰ. 动…　Ⅱ. ①陈…②褚…　Ⅲ. 动力系统（数学）－研究生－教学参考资料　Ⅳ. O19

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 027341 号

责任编辑：[illegible]杨波/责任校对：陈丽珠

责任印制：安春生/封面设计：高海英　王浩

[illegible]出版

[illegible]东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2002年9月第 一 版　开本：B5（720×1000）

2002年9月第一次印刷　印张：20 3/4

印数：1—3 000　字数：394 000

定价：31.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换（环伟））

前　言

动力系统是20世纪最富有成就的一个数学分支，也是非线性科学的一个重要组成部分，在不少领域中有重要的应用.

一个动力系统是由拓扑空间及其上的连续自映射所构成的系统. 该系统研究的问题，大致可以分为两类：一类是孤立地研究一个自映射迭代生成的动力学复杂性质，即长时间的形态；另一类是把一个动力系统看作是某个空间内的一个点，研究诸如在微小挠动下动力性状的改变.

与此同时，从20世纪六七十年代以来，随着计算能力的不断提高，非线性科学发现两个极端的现象，一是具有内秉的对称和保守性质的孤立子，另一是在耗散系统中发现了奇怪吸引子和混沌. 近来又发现一批从孤立子可演化为混沌现象的非线性演化方程. 从而推动了无穷维动力系统的研究，与有穷维动力系统不同的是，它研究空间上的混沌现象，而后者仅研究时间上的混沌现象. 但是，二者却有令人惊叹的联系.

动力系统不仅是非线性科学的研究对象，而且是研究非线性"复杂性"的有力工具，其理论与方法已广泛渗透于许多重要领域和众多学科.

作者出于计算和理论研究而感兴趣于动力系统. 于是，在多年教学与研究的基础上，希望搜集整理这一领域的文献与典籍，对其知识进行再组织. 为成此书，历时两年，虽无博观约取、厚积薄发之力，但有心在适当深入的基础上拓宽知识，注重学科内部联系，保持结构相对完整，以便于教学组织与自学参考.

本书内容分为三部分，拓扑动力系统（含符号动力系统、分形动力系统），微分动力系统和无穷维动力系统. 其中，拓扑动力系统是基础. 读者可按需选读. 一般来讲，需要具备点集拓扑和非线性泛函分析的基本知识.

本书§12.3，由伍渝江先生撰写. 所引文献，已注明出处，在此对原著表示尊敬而诚挚的谢意.

作者囿于学识，对书中挂一漏万、疏忽纰缪之处，向读者和文献原著表示歉意，并敬请斧正.

作　者

2001年于西安交通大学

目　录

第一章 概　　述

§1.1 动力系统概述

1591 年,奥地利格拉茨大学讲师开普勒(Kepler)前往布拉格,成为天文学家第谷·布拉赫(Tycho)的助手. 开普勒根据第谷的准确观测数据,发现了行星运动三定律,其中对当时正统派理性思潮最为震动的一条是,每个行星沿着以太阳为一个焦点的椭圆轨道而运动.在当时理性思潮的影响下,人们普遍认为行星绕太阳旋转的轨道是圆,因为圆是最完美的曲线.

为什么行星运动的轨道是椭圆曲线而不是"完美"的圆呢?

半个多世纪以后,牛顿(Newton)于 1687 年在其名著《自然哲学的数学原理》中,提出万有引力定律,而后用数学的形式——常微分方程——推出了开普勒定律,完成了日心地动说的力学解释,也同时开始了以常微分方程为对象的动力系统的研究.下面仅介绍行星轨迹为椭圆的论述.

例 1.1.1 行星轨道方程.设某行星运动于以太阳为原点 O 的复平面内,在时刻 t 的位置

$$z(t) = re^{i\theta},$$

其中 $r = r(t), \theta = \theta(t)$. 设行星和太阳的质量分别为 P 和 M, $G = 6.672 \times 10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1}$ 是万有引力常数,于是由万有引力定律,有

$$P\ddot{z} = -\frac{PMG}{r^2} e^{i\theta},$$

其中

$$\ddot{z} = ((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + i(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}))e^{i\theta}$$

是加速度.分离方程的实部和虚部得

$$-\frac{MG}{r^2} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \tag{1.1.1}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0. \tag{1.1.2}$$

由方程(1.1.2)得 $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$, 从而

$$r^2\dot{\theta} = h, \tag{1.1.3}$$

其中 h 是常数,它等同于开普勒第二定律,行星在相等的时间内扫过相等的面积.

联合(1.1.1)和(1.1.3),令 $r=\dfrac{1}{u}$,得

$$\frac{MG}{h^2}=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u,$$

再令 $v=u-\dfrac{MG}{h^2}$, $p=\dfrac{h^2}{MG}$, 解得

$$r=\frac{p}{1-\mu\cos\theta},$$

其中 $\mu=Ap$ 是离心率.由此可见,点(r,θ)的轨道是离心率为 $\mu(0<\mu<1)$,极点 O 为一个焦点的椭圆.

与例 1.1.1 的分析方法不同的是,绝大多数的微分方程不能用已知函数的积分来表示其通解.这导致微分方程定性理论[1~3]的研究,其肇端始于法国数学家 H.Poincaré 和俄国数学家 A.M.Ляпунов.前者在 1881~1886 年间连续发表的论文《微分方程所确定的曲线》,后者在 1882~1892 年间完成的博士论文《运动稳定性的一般问题》,是这一方面的经典著作.到 1927 年,G.D. Birkhoff 在继承并发展 Poincaré 工作的基础上,使"动力系统"一词首见于其专著[4].

如例 1.1.1 所示,一个用常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\Phi(x,t),\quad x\in\mathbf{R}^n$$

描述的随时间演化的系统,是一个经典意义下的动力系统.设其满足初值条件

$$x(0)=x_0,\quad x_0\in\mathbf{R}^n$$

的解为 $\varphi(t,x_0)$,且存在区间是 $\mathbf{R}$,则映射 $\varphi:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 满足

(H1)　$\varphi(0,x)=x,\quad \forall x\in\mathbf{R}^n$.

(H2)　$\varphi(s+t,x)=\varphi(s,\varphi(t,x)),\quad \forall s,t\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}^n$.

更一般地,称满足条件 H1 和 H2 的映射 $\varphi:\mathbf{R}\times X\to X$ 为连续动力系统或流,其中 X 是底空间.

下面例 1.1.2 的差分方程给出的动力系统是离散动力系统。

例 1.1.2 (Malthus 模型,1798 年)　设某人口群体在第 n 个时间段开始时的总数为 P_n,若出生率与死亡率之差为 b,则有 Malthus 模型

$$P_{n+1}=kP_n,\quad n\in\mathbf{Z}_+,$$

其中 $k=1+b$,于是

$$P_{n+1}=k^{n+1}P_0,\quad n\in\mathbf{Z}_+.$$

定义 $f:\mathbf{Z}_+\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为 $f^n(x)=k^nx$,则 Malthus 模型又可记为

$$P_{n+1}=f(P_n).$$

显然,映射 $f:\mathbf{Z}_+\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足条件 H1 和 H2,构成 $\mathbf{R}$ 上的离散动力系统,而

$$\mathrm{Orb}_f(P_0) = \{P_0, P_1, P_2, \cdots\}$$

是 f 过 P_0 点的一条轨道.

动力系统不仅可以通过映射 φ 或 f 在"时间"维上的定义域来进行分类,如连续动力系统或离散动力系统,而且可以通过底空间 X 的结构来进行分类.例如,若 X 分别是拓扑空间(或度量空间),C^r 微分流形和无穷维 Banach 空间,则在 X 上可分别定义拓扑动力系统,微分动力系统和无穷维动力系统.

一般而言,动力系统研究的主要问题是:

(1)轨道长时间的渐近性质,如极限点集、非游荡点集、周期点集等.

(2)轨道在相空间中的稠密性,如极小性、拓扑传递性、拓扑混合性等.

(3)动力系统的整体性质,如全局吸引子等.

(4)动力系统的拓扑分类与结构稳定性,如双曲不动点和双曲不变集的稳定性.

(5)动力系统的复杂性,包括几何复杂性,如混沌、分形,以及动力学复杂性,如拓扑熵、Liapunov 指数等.

研究这些问题的主要方法,一是以结构分析为主的几何方法,另一是以数值计算为主的模拟方法.本书拟采用前者依次逐层展开对上述动力系统主要问题的研究和讨论.

§1.2 动力系统的底空间

设 S 是一个集合,映射 $f: S \to f(S) \subseteq S$ 按复合运算"$\circ$"满足

H1 $\quad f^0 = id.$

H2 $\quad f^{m+n} = f^m \circ f^n, \quad \forall\, m, n \in \mathbf{Z}_+.$

其中 id 表示恒同映射.一般来讲,可定义一单边的离散动力系统(S, f).这时,S 的结构对(S, f)的性质有决定性的影响.

在形式系统的一般理论中,没有限定 S 的结构,仅设 S 是一个非空集.S 上的一条规则是一个有序对(X, x),表示 $X \Rightarrow x$,其中 $X \subseteq S$ 称为规则的前提,$x \in S$ 称为规则的结论.设 Ω 是一个规则集,子集 $A \subseteq S$ 称为 Ω_封闭的,若

$$X \subseteq A \Rightarrow x \in A, \quad \forall (X, x) \in \Omega.$$

令 $I(\Omega)$是一切 Ω_封闭集的交,即

$$I(\Omega) = \bigcap \{A \mid A \subseteq S \text{ 且 } \Omega\text{_ 封闭}\}.$$

性质 1.2.1[5] 对映射 $\Phi: 2^S \to 2^S$,存在 S 上的规则集 Ω_Φ,

$$\Omega_\Phi = \{(X, x) \mid X \subseteq S, x \in S, x \in \Phi(X)\}.$$

使得 $I(\Omega_\Phi)$是 Φ 的最小不动点.

不动点是最简单的周期点.事实上,对任意一个序数 σ 可以定义

$$\Phi^{(0)} = \varnothing, \quad \Phi^{(\sigma)} = \bigcup_{\tau<\sigma}\Phi^{\tau}, \quad \Phi^{\sigma} = \Phi(\Phi^{(\sigma)}), \quad \Phi^{\infty} = \bigcup_{\sigma}\Phi^{\sigma},$$

使得 Φ^∞是 Φ 的最小不动点.在自然推理系统中,空集表示以公理为前提的推理规则,因而 Φ^∞是公理前提集的"极限集".

集射系统(S,Φ)太广泛,在研究中希望限定 S 的结构.集合 S 的基本结构有三类:序结构、代数结构和拓扑结构.

首先,设集合 S 关于序关系"$\leqslant$"构成 一个偏序集$(S,\leqslant)$,其中任意两个元素 a 和 b 都有公共下确界和上确界,在 S 上 定义运算$\wedge$和$\vee$为

$$a \wedge b = \inf(a,b), \quad a \vee b = \sup(a,b),$$

则$(S,\wedge,\vee)$是一个格.设 L_1 和 L_2 是格,称映射 $f:L_1\to L_2$ 是单调的,若

$$x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y), \quad \forall x,y \in L_1,$$

记单调映射的集合为 F,称映射 $\tau:F\to F$ 为F 上的泛函.当 $f,g\in F$,且

$$f(x) \leqslant g(x), \quad \forall x \in L_1$$

时,称 $f\leqslant g$,于是,可类似地定义单调泛函.称泛函 τ 是连续的,若 τ 是单调的,且对 F 中的任何链$\{f_i\}$,有

$$\tau[\sup\{f_i\}] = \sup\{\tau[f_i]\},$$

其中 sup 表示上确界.于是,有如下性质.

性质 1.2.2[6]　任何连续泛函 τ 均有一个最小不动点.

证明　设 Ω 是处处无定义函数,由 τ 的单调性,使函数序列

$$\Omega, \tau[\Omega], \tau^2[\Omega], \cdots$$

构成一个链,故上确界 $tau=\sup\{\tau^k[\Omega]\}$必然存在.不难证明,$tau$ 是τ 的一个最小不动点.

显然,τ 满足本节条件 H1 和 H2,使(F,τ)是一个动力系统.格上泛函的不动点理论,是理论计算机科学程序理论中形式语义的一个数学基础.

其次,设集合 S 上定义了一组运算 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,其运算的结果仍是 S 中的元素,则称 S 对于这 n 个运算构成一个代数.前面由偏序关系引出的格,就是一个代数结构.下面,设 S 是 Galois 域

$$GF(23) = \{[k] \mid k = 0,1,\cdots,22\},$$

$$[k] = \{a \in \mathbf{Z} \mid a \equiv k \bmod 23\},$$

同样,$GF(23)$是代数结构.取 $5\in GF(23)$,定义 $f:GF(23)\to GF(23)$为

$$f^n(k) = 5^n k \bmod 23, \quad k \in GF(23),$$

并记$f^n(k)=k_n$.于是,得到动力系统$(GF(23),f)$,且过任一点$k\in GF(23)$的轨道$\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$是周期轨道,例如过点$k=1$的轨道的周期是22.Galois域

$GF(p)$上的代数性质,在密码学中有重要应用[7].

其三,讨论 S 具有拓扑结构的情况,仍以形式系统为例.

设 Γ 是一阶语言 L 理论 T 全体非逻辑公理的集合,记

$$I = S_\omega(\Gamma) = \{A \in 2^\Gamma \mid \mathrm{card}(A) < \infty\},$$

$D \subseteq 2^I$ 是 I 上的一个滤集,记

$$\tau_I = D \cup \{\varnothing\},$$

则(I, τ_I)是以 τ_I 为拓扑的拓扑空间. 对于 $i \in I$, T_i 是以 i 为非逻辑公理的理论,$\mathscr{A}_i$ 是 T_i 的一个模型. 记 $T = \{T_i \mid i \in I\}$和 $\mathscr{A} = \{\mathscr{A}_i \mid i \in I\}$分别是一个理论族和一个模型族. 于是由$(I, \tau_I)$可以导出与其同胚的拓扑空间$(T, \tau_T)$和$(\mathscr{A}, T_{\mathscr{A}})$. 一般记$(X, \tau_X)$和$(Y, \tau_Y)$是由$(I, \tau_I)$导出的 $T_j (j = 0, 1, 2)$拓扑空间,u_0 表示选择最小邻域的选择函数,那么在(X, τ_X)中可引入偏序,称 $x \leqslant x^*$,若 $x^* \in u_0(x) \in \tau_X$;类似地,在$(Y, \tau_Y)$中引入偏序. 记 F 是X 到 Y 的全体单调算子的集合. 在 F 中引入拓扑基

$$u(f) = \{g \mid g \in F, g(x) \in u_0(f(x)), \forall x \in X\},$$

其中 $u(f)$表示 F 的邻域. 于是,在 F 上可导入拓扑,从而有如下结论.

性质 1.2.3[8] 若单调泛函 $\tau: F \to F$ 是上确界可达的,则 τ 在F 上存在一个最小不动点.

例 1.2.1 设 $I = \{\perp, 0, 1, \cdots, n\}$,其中符号$\perp$表示无定义,$u_0(j) = \{j, j+1, \cdots, n\}$, $0 \leqslant j \leqslant n$, $u_0(\perp) = I$,于是有序关系$\perp \leqslant 0 \leqslant 1 \leqslant \cdots \leqslant n$. 定义 $f: I \to I$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ 0, & x \leqslant 1, \end{cases}$$

显然 f 是单调函数,定义泛函 $\tau: F \to F$ 为

$$\tau^k[\Omega] = f^k, \quad k = 1, 2, \cdots$$

于是有

$$\cdots \leqslant \tau^m[\Omega](x) \leqslant \cdots \leqslant \tau^2(x)[\Omega] \leqslant \tau[\Omega](x), \quad \forall x \in I,$$

记 $g(x) = f^2(x)$,有

$$\tau[g](x) = \tau[f^2](x) = \tau^3[\Omega](x) = g(x), \quad \forall x \in I,$$

即 $g(x)$是 τ 的不动点.

一般而言,由超滤集引入的拓扑是 T_0 或 T_1 空间,其拓扑刻画还不够精细. 具有可数基的 T_3 空间(正则的 T_1 空间),是可度量化的拓扑空间. 而在度量空间上建立的拓扑动力系统,具有丰富的性质,这正是下面章节所要研究的主要对象. 但并不是每个拓扑空间都可度量化,拓扑空间可度量化,当且仅当它是具有 σ 局部有限基的 T_3 空间[9].

由前面的讨论可知，由拓扑空间的拓扑结构，可引入序关系，即具有序结构，但对代数结构而言并不是所有的拓扑空间都有线性的代数结构，即是线性空间. 在有线性结构的度量空间中，有的还可以引入范数使该范数所规定的度量就是原度量空间中的度量，而成为赋范空间. 显然，赋范空间是可度量化的线性拓扑空间，但并不是每个度量空间都能按所规定的距离成为赋范空间[10]. 在微分动力系统中，双曲不动点的结构稳定性是在非线性泛函分析的框架内进行讨论的. 同样，在这一框架内还可以讨论无穷维动力系统.

讨论双曲不变集的结构稳定性时，往往不可能在一个整体的欧氏空间中进行，而必须在流形中进行讨论. 流形是"局部欧氏"的，即在其每一点的附近与欧氏空间(或欧氏空间中的开集)同胚. 于是，有必要准备微分拓扑的工具.

架构在上述空间上的动力系统，是确定性动力系统. 如果在概率空间或模糊拓扑空间上建立动力系统，就分别为随机动力系统和模糊动力系统. 后面章节仅适当涉及随机动力系统的基本概念.

§1.3 动力系统的复杂性

动力系统底空间的不同结构使得动力系统的类型是多样的，而底空间上映射的非线性性质又使得动力系统的大范围性状是复杂的. 尤其是 20 世纪 60 年代以来，随着计算数学和计算机技术的发展，采用数值模拟的计算可视化方法，得到了许多令学界惊叹不已的发现，如分歧(或分支、分岔)(bifurcation)、混沌(chaos)、孤立子(soliton)和分形(fractal)等，极大推动了动力系统的研究及其在非线性科学研究中的应用，同时数值分析方法(数值实验、数值模拟、数值仿真、数值发现等)也成为一种重要的研究方法。

首先讨论区间自映射的分支现象. 设 $I\subset\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个区间，$x_0\in I$ 是区间自映射 $f:I\to I$ 的不动点. 当 $|f'(x_0)|\neq1$ 时，x_0 是 f 的双曲不动点，f 在 x_0 点附近是结构稳定的. 下面，讨论 Logistic 函数族在非双曲不动点 x_0，即 $|f'(x_0)|=1$ 的情况.

例 1.3.1 Logistic 函数族

$$f(x)=f(x,\lambda)=\lambda x(1-x)$$

的分支[11]. 考虑迭代

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad x_n\in I=[0,1],\quad n=1,2,\cdots$$

在 I 中的周期点，其中 $\lambda\in[0,4]$. 当 $n=1$ 时，f 在 I 中的非平凡 1 周期点(不动点) $x_1^{(1)}=1-1/\lambda$，当 $1<\lambda<3$ 时，是稳定不动点，即在 f 迭代作用下吸引它附近的点；而当 $\lambda>3$ 时，是不稳定不动点，即在 f 迭代作用下排斥它附近的点，$\lambda_1=3$ 是失稳的临界值，又称分支点. 同时，在 $\lambda_1=3$ 附近

$$f^2(x) = f \circ f(x) = \lambda(\lambda x(1-x))(1-\lambda x(1-x))$$

有两个稳定的不动点

$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)} = \frac{1}{2\lambda}(1+\lambda \pm \sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}),$$

即 f 的 2 周期稳定点,其分支点 $\lambda_2 = 1+\sqrt{6} = 3.449\cdots$. 依次下去,每个 2 周期点失稳后又产生两个稳定的 4 周期点……这种现象称为倍周期分支,其分支点序列 $\{\lambda_n\}$ 满足

$$f^{2^{n-1}}(x^*, \lambda_n) = x^*, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{2^{n-1}}(x^*, \lambda_n) = -1.$$

其著名的分支图似乎首先由 May[12]给出. 并且, $\{\lambda_n\}$ 有如下性质:

1° $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = 3.569945672\cdots$.

2° $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} = \delta = 4.669201609\cdots$.

其中常数 δ 称为费根鲍姆常数,它与区间上光滑自映射函数族的具体形式无关。

Logistic 映射的迭代模型,描述了非世代重叠的昆虫逐年种群量,而作为最早发现的混沌模型,是 Lorenz 模型.

例 1.3.2 Lorenz 模型

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-z), \\ \dot{y} = bx - y - xz, \\ \dot{z} = cz + xy. \end{cases}$$

轨线的计算机程序. 如下程序给出了 Lorenz 曲线图.

```
#include <graphics.h>
# define Xunhuan-factor 40000
# define Zoom-factor 9
float a=10, b=28, c=-2.66667;

float xdot(float x, float y, float z) {return(a*(y-x));}
float ydot(float x, float y, float z) {return(b*x-y-x*z);}
float zdot(float x, float y, float z) {return(c*z+x*y);}

main()
    {
    float x=1, y=1, z=1, dt=0.001, flag=0, dx, dy, dz;
    int gdriver=DETECT, gmode;
```

```
registerbgidriver(EGAVGA-driver);
initgraph(&gdriver,&gmode,"");
setbkcolor(BLACK);
cleardevice();

while(flag<=Xunhuan-factor)
    {
    putpixel(x*Zoom-factor+320,480-z*Zoom-factor,RED);
    dx=xdot(x,y,z)*dt;
    dy=ydot(x,y,z)*dt;
    dz=zdot(x,y,z)*dt;
    x=x+dx; y=y+dy; z=z+dz;
    flag++;
    }
getch();
closegraph();
}
```

说明:Xunhuan-factor控制循环次数,即描点个数,Zoom-factor控制图形大小.

Lorenz模型是不含任何外在随机因素的确定性模型,其长时间行为对初始的微小变化十分敏感,具有“内在随机性”.非线性系统除了混沌、奇怪吸引子现象外,另一类现象却表现出内秉的保守和对称性质,如孤立波[13,14].

1834年,英国造船工程师J. S. Russell[15]在Edinburg附近一条狭窄的运河中观察到孤立波现象.60年后,瑞典Amsterdam大学的D.J.Korteweg教授和他的学生G. de Vries[16]在1895年提出了流体中单向波传播的数学模型

$$\frac{\partial u}{\partial t} \pm 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

即通常所说的KdV方程.又沉寂60多年后,在20世纪60年代初期,利用计算机数值实验技术,出现了几次对该类问题的重要研究.1965年,N. J. Zabusky和M.D. Kruskal[17]把KdV方程用于等离子体波的研究,首次用孤立子(soliton)一词描述孤立波的粒子行为.后来,人们发现了孤立波对应于常微分方程所描述的某些动力系统中的同(异)宿轨道,进而发现与涡旋、湍流的联系[18].通过一大类非线性演化方程的研究,同时也推动了无穷维动力系统理论的发展.

分支、混沌是动力系统的时间演化行为,反映出系统的动力学复杂性.这

里,拓扑熵和 Liapunov 指数是描述动力学复杂性的重要概念.此外,奇怪吸引子、湍流的结构是动力系统的空间复杂性,分形[16,17]是描述这类空间复杂性的重要概念.同时,结构与随机,无论是概率空间上的随机现象,还是确定性系统的内在随机性,又伴生而交织,更使非线性动力系统的时空性状更加复杂.

本书围绕这一主题,介绍基本的数学工具和方法.

第二章 拓扑动力系统

拓扑动力系统是拓扑空间上的一个单参数同胚变换群，其一般理论的研究始于 20 世纪初 G.D.Birkhoff 等人的工作[4,19,20]. 本章在拓扑空间上引入动力系统的概念，并通过紧致度量空间上极限点集，非游荡点集和拓扑熵等概念，着重讨论轨道的渐近行为，以及轨道在拓扑空间中的稠密性和混沌(chaos). 考虑到一维拓扑流形的分类，给出了线段和圆周上自映射的动力学性质.

§2.1 拓扑动力系统

用 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{Z}$ 分别表示实数集和整数集按通常加法构成的实数拓扑加群和整数拓扑加群，X 和 Y 分别表示拓扑空间.

定义 2.1.1 设 $G\in\{\mathbf{R},\mathbf{Z}\}$，$X$ 是一拓扑空间，称连续映射 $\varphi:G\times X\to X$ 为 X 上的一个拓扑动力系统，若 φ 满足：

(1) $\varphi(0,x)=x,\quad \forall x\in X$.

(2) $\varphi(t+s,x)=\varphi(t,\varphi(s,x)),\quad \forall t,s\in G, x\in X$.

此时，空间 X 又称为相空间，φ 也简称为动力系统.

有时，为了指明相空间，又将动力系统记为 (X,φ). 特别当是 X 是 C^r 微分流形且 φ 是 C^r 映射($r\geqslant 1$)时，则称 φ 是一个 C^r 微分动力系统.

当 $G=\mathbf{R}$ 时，称动力系统 φ 是 X 上的流；如果 φ 又是 C^r 微分动力系统，则称 φ 是 C^r 流. 当 $G=\mathbf{Z}$ 时，称动力系统 φ 是 X 上的离散动力系统.

对 X 上的动力系统 φ 和任一 $t\in G$，可定义映射 $\varphi^t:X\to X$ 为 $\varphi^t: x\mapsto \varphi(t,x)$. 显然 φ^t 具有连续逆映射 φ^{-t}，因而 φ^t 是 X 到 X 的一个同胚，且满足：

(1) $\varphi^0=id$.

(2) $\varphi^{t+s}=\varphi^t\circ\varphi^s,\quad \forall t,s\in G$.

其中 id 表示恒同映射，$\varphi^t\circ\varphi^s$ 表示复合映射. 于是，有如下命题成立.

命题 2.1.1 φ 是拓扑动力系统的充要条件是拓扑空间 X 上的同胚映射簇 $\{\varphi^t\,|\,t\in G\}$ 按复合运算“$\circ$”构成加群 $(\{\varphi^t\,|\,t\in G\},\circ)$.

由此可知，拓扑空间 X 上的一个动力系统实质上是一个单参数的同胚变换群. 于是有如下与定义 2.1.1 等价的定义.

定义 2.1.2 设 $G\in\{\mathbf{R},\mathbf{Z}\}$，连续映射 $\varphi:G\times X\to X$ 称为拓扑动力系统，

若$\{\varphi^t \mid t \in G\}$是映 X 至 X 的同胚映射簇且按复合运算构成加群;若 $G \in \{\mathbf{R}_+, \mathbf{Z}_+\}$时,$\{\varphi^t \mid t \in G\}$按复合运算构成半群,则称 φ 为半动力系统.

不言而喻,非负实数集 $\mathbf{R}_+$ 和非负整数集 $\mathbf{Z}_+$ 按通常加法构成半群.下面不特别指明 $G \in \{\mathbf{R}_+, \mathbf{Z}_+\}$时,则指 $G \in \{\mathbf{R}, \mathbf{Z}\}$.

例 2.1.1 设 $\forall t \in G, \varphi^t = id; X \to X$ 则 φ 是一动力系统,称之为平凡力系统.

例 2.1.2 设X是圆心在点$(0,1)$处的单位圆周,与实数轴$\mathbf{R}$相切于原点O处,用$S = O$和$N = (0,2)$分别表示圆周上的南极点和北极点.设 $x \in X \setminus \{N\}$延长弦 Nx 与 $\mathbf{R}$ 交于 r 处,于是得 $X \setminus \{N\}$与 $\mathbf{R} \setminus \{\pm\infty\}$的一一的映射 $g: x \mapsto r$.定义 $f: X \to X$ 为

$$f(x) = \begin{cases} y, & x \in X \setminus \{N\}, \text{使 } g(y) = \dfrac{1}{2}g(x), \\ N, & x = N, \end{cases}$$

则 f 是X 上的离散动力系统,称 f 为北极映射.

例 2.1.3 在 $\mathbf{R}^n$ 中定义等价关系"~":

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}^n,$$

称商空间 $T^n = \mathbf{R}^n/\sim$ 为 n 维环面.在 $\mathbf{R} \times T^2$ 上定义 $\varphi: \mathbf{R} \times T^2 \to T^2$ 为

$$\varphi(t, ([x],[y])) = ([x + t],[y + \theta t]), \quad \forall t \in \mathbf{R}, ([x],[y]) \in T^2.$$

当 θ 为有理数时,称 φ 为有理流,每条轨道是拓扑圆;当 θ 为无理数时,称 φ 为无理流,每条轨道是 $\mathbf{R}$ 在连续单射下的像且在 T^2 上稠.

例 2.1.4 对固定的 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,同胚 $f: T^2 \to T^2$ 定义为 $f(([x],[y])) = ([x + \alpha],[y + \beta])$,由此导出一离散动力系统.称为环面 T^2 上的旋转映射.

注 2.1.1 流和离散动力系统的关系.对拓扑空间 X 上的一个流 φ,将 G 限制在Z 上,就得到一个离散的动力系统,此时称该离散动力系统嵌入于流 φ.反之,设 $f: X \to X$ 是同胚映射,由命题 2.1.1 知(X, f)是一离散动力系统.对任一离散动力系统 f,是否存在 X 上的一个流 φ,使 f 嵌入 φ 呢?一般来讲,不一定有肯定的结论;但是,通过扭扩(suspension)的办法,可以将 f 嵌入到高一维流形上的流中.具体的作法如下:

设 X 是一个 m 维的C^r 流形,$f: X \to X$ 是C^r 同胚,在积流形 $\mathbf{R} \times X$ 上定义一个单位向量场,方向同于 $\mathbf{R}$ 的方向,由于紧致 $C^r(r \geqslant 1)$微分流形 X 上的一个 C^r 向量场,总能产生 X 上的一个C^r 流,故该单位向量场在 $\mathbf{R} \times X$ 上可产生一个C^r 流 φ 满足

$$\varphi^t((s, x)) = \varphi(t + s, x), \quad \forall x \in X, s, t \in \mathbf{R}.$$

在 $\mathbf{R} \times X$ 上定义关系"~":

$$(t, x) \sim (s, y) \Leftrightarrow t - s \in \mathbf{Z}, \quad y = f^{t-s}(x)$$

显然是等价关系.作商空间 $\widetilde{X}=\mathbf{R}\times X/\sim$,它是一个 $m+1$ 维的 C^r 流形.记 $\widetilde{X}$ 中的元素为

$$[(t,x)]=\{(s,y)\in\mathbf{R}\times X\mid(s,y)\sim(t,x)\},$$

于是 $\mathbf{R}\times X$ 上的 C^r 流 φ 诱导出 $\widetilde{X}$ 上的 C^r 流 $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi}^s([(t,x)])=[(t+s,\varphi(t+s,x))].$$

直观上,流 $\tilde{\varphi}$ 是从横截面 $\{0\}\times X/\sim$ 上任一点 x 出发而返回 $\{0\}\times X/\sim$ 的轨道簇,其第一次返回的点恰为 $f(x)$,即 f 是流 $\tilde{\varphi}$ 在该横截面上的首次返回映射(Poincaré 映射).例如,当 X 是单位圆,而 f 是关于 x 轴的对称变换时 $\widetilde{X}$ 就是一个 Klein 瓶.

由于流和同胚映射的如此关系,下面着重介绍离散动力系统.

定义 2.1.3 设 (X,f) 是紧致系统,若紧子集 $X_0\subset X$ 满足 $f(X_0)\subset X_0$,则 f 在 X_0 上的限制

$$f|_{X_0}:X_0\to X_0$$

所生成的紧致系统 $(X_0,f|_{X_0})$ 称为 (X,f) 的子系统.

定义 2.1.4 设 $f:X\to X$ 和 $g:Y\to Y$ 分别是拓扑空间 X 和 Y 上的自同胚,若存在同胚映射 $h:X\to Y$ 使 $h\circ f=g\circ h$,则称同胚 f 与 g 是拓扑共轭的,而同胚 h 称之为 f 到 g 的一个拓扑共轭.

定义 2.1.5 称动力系统 (X,φ) 和 (Y,ψ) 是拓扑等价的,若存在同胚 $h:X\to Y$ 使 $h(\varphi(t,x))=\psi(s(t),h(x))$,其中 $s(t)$ 是 t 的严格单增函数,又称同胚 $h:X\to Y$ 是动力系统 (X,φ) 和 (Y,ψ) 的拓扑等价.

显然,拓扑共轭和拓扑等价均是等价关系.在两个拓扑等价的动力系统上,存在一个同胚映射将一个的一条轨道保持方向地映成另一个的一条轨道.

例 2.1.5 在例 2.1.3 中定义的有理流都是拓扑等价的.

证明 对任一 $\theta\in\mathbf{R}$,记例 2.1.3 中定义的 φ 为 φ_θ,下证 φ_θ 与 φ_0 是拓扑等价的.设 p,q 互质且 $p>0$,$\theta=q/p$,由数论知存在正整数 r,s 使

$$\begin{vmatrix}p & r\\ q & s\end{vmatrix}=1\text{ 或 }-1,$$

故 $h=\begin{pmatrix}p & r\\ q & s\end{pmatrix}:T^2\to T^2$ 是同胚映射.于是由

$$h(\varphi_0(t,([x],[y])))=\begin{pmatrix}p & r\\ q & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}[x+t]\\ [y]\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}[px+ry+pt]\\ [qx+sy+qt]\end{pmatrix}=\varphi_\theta(pt,h([x],[y]))$$

知 φ_θ 与 φ_0 是拓扑等价的,由 θ 的任意性,故所有的有理流都是拓扑等价的.

定义 2.1.6 设 $f:X\to X$ 是一个同胚,称集合

$$\mathrm{Orb}(x)=\{f^k(x)\mid k\in\mathbf{Z}\},$$
$$\mathrm{Orb}^+(x)=\{f^k(x)\mid k\in\mathbf{Z}_+\},$$
$$\mathrm{Orb}^-(x)=\{f^{-k}(x)\mid k\in\mathbf{Z}_+\}$$

分别为离散动力系统 f 过点 x 的轨道,正半轨道和负半轨道.

当需要特别指明 f 时,用 $\mathrm{Orb}_f(x)$等代替 $\mathrm{Orb}(x)$等.

命题 2.1.2 拓扑共轭或拓扑等价 h 是保源,保汇,保轨道的.

证明 仅证拓扑共轭是保轨道的.设同胚 f 和 g 的轨道分别为 $\mathrm{Orb}_f(x)$ 和 $\mathrm{Orb}_g(y)$.由 $h\circ f=g\circ h$ 有

$$h\circ f^k=g\circ h\circ f^{k-1}=g^k\circ h,$$

可知

$$h(\mathrm{Orb}_f(x))=\mathrm{Orb}_g(h(x)),$$

故拓扑共轭 h 是保轨道的. □

§2.2 轨道渐近性

轨道,是动力系统研究的基本对象.本节介绍轨道的不变性质,包括回复性和渐近性.

定义 2.2.1 设 $f:X\to X$,若 $x\in X$ 时,存在 $n\in\mathbf{N}$ 使 $f^n(x)=x$,则称 x 为 f 的周期点,过周期点的轨道称为周期轨道;如果

$$f^k(x)=x,\quad f^m(x)\neq x,\quad m=1,2,\cdots,k-1,$$

则称 k 为 x 的周期;特别,当 $k=1$ 时,点 x 称为 f 的不动点.f 的周期点集合和不动点集合分别记为 $\mathrm{Per}(f)$和 $\mathrm{Fix}(f)$.

自然,一条轨道为周期轨道的充分必要条件是它为有限轨道.

例 2.2.1 设(X,f)是平凡动力系统,则 $\mathrm{Per}(x)=\mathrm{Fix}(f)=X$.

例 2.2.2 设 $f:X\to X$ 是北极映射,则 $\mathrm{Fix}(f)=\{N,S\}$.

例 2.2.3 设旋转动力系统 $f:T^2\to T^2$ 定义如例 2.1.4,当 α 和 β 皆为有理数时,每一轨道只有 m 个点,故 $\mathrm{Per}(f)=T^2$ 且周期为 m.

定义 2.2.2 设 $x\in X$,若 $f:X\to X$ 连续,称

$$L_\omega(x)=\bigcap_{n\in N}\overline{\{f^k(x)\mid k\geq n\}}$$

为轨道 $\mathrm{Orb}(x)$的 ω 极限点集,而称 $L_\omega=\bigcup_{x\in X}L_\omega(x)$为 f 的 ω 极限集,若 $f:X\to X$ 同胚,称

$$L_\alpha(x)=\bigcap_{n\in N}\overline{\{f^{-k}(x)\mid k\geq n\}}$$

为轨道 $\mathrm{Orb}(x)$的 α 极限点集,而称 $L_\alpha=\bigcup_{x\in X}L_\alpha(x)$和 $L=L_\omega\cup L_\alpha$ 分别为f 的 α 极限集和极限点集;若 f 连续但不同胚,则称 $L=L_\omega$ 为f 的极限点集.

有时也记 L_ω 和 L_α 为 $L_\omega(f)$ 和 $L_\alpha(f)$.

注 2.2.1 定义 2.2.2 中的 $L_\omega(x)$ 和 $L_\alpha(x)$ 又可表示为

$$L_\omega(x) = \{y \in X \mid \exists\, n_j \nearrow +\infty \text{ 使 } f^{n_j}(x) \to y\}, \tag{2.2.1}$$

$$L_\alpha(x) = \{y \in X \mid \exists\, n_j \nearrow +\infty \text{ 使 } f^{-n_j}(x) \to y\}, \tag{2.2.2}$$

其中 $n_j \nearrow +\infty$ 表示 n_j 严格递增, $L_\omega(x)$ 和 $L_\alpha(x)$ 分别表示 f 的正半轨道和负半轨道的极限点集.

定义 2.2.3 若 $E \subset X$ 且 $f(E) = E$, 则称 E 为 f 的不变集.

命题 2.2.1 集 $E \subset X$ 为 f 的不变集的充要条件是

$$y \in E \Rightarrow \mathrm{Orb}(y) \subset E.$$

证明 首先, 设 $y \in E$, 由 $f(E) = E$ 有 $f^k(y) \in f^k(E) = E$, 故 $\mathrm{Orb}(y) \subset E$. 反之, 由 $\mathrm{Orb}(y) \subset E$, 有 $f(y) \in E$ 和 $f^{-1}(y) \in E$, 故 $f(E) = E$. □

容易证明如下命题.

命题 2.2.2 集 $\mathrm{Orb}_f(x)$, $\mathrm{Per}(f)$ 和 $\mathrm{Fix}(f)$ 是映射 f 的不变集.

命题 2.2.3 设 $f: X \to X$ 同胚, 对任一 $x \in X$, 有 $L_\omega(x)$ 和 $L_\alpha(x)$ 是闭集; 更若 X 是紧致拓扑空间, 则 $L_\omega(x)$ 和 $L_\alpha(x)$ 非空且是 f 的不变集.

证明 f 的 α 极限点集是 f^{-1} 的 ω 极限点集, 故仅对 $L_\omega(x)$ 进行证明.

由定义 2.2.2 知 $L_\omega(x)$ 是闭集, 且由 X 的紧性知 $L_\omega(x) \neq \varnothing$. 下面利用 (2.2.1) 式证 $L_\omega(x)$ 是 f 的不变集. 由 f 的连续性, 显然有 $f(L_\omega(x)) \subseteq L_\omega(x)$, 故只须证

$$L_\omega(x) \subseteq f(L_\omega(x)). \tag{2.2.3}$$

任取 $y \in L_\omega(x)$, $\exists\, n_i \nearrow +\infty$ 使 $f^{n_i}(x) \to y$. 由 X 的紧性, 在集合 $\{f^{n_i-1}(x)\}$ 中有收敛子列, 不妨就记为 $\{f^{n_i-1}(x)\}_{i=1}^{\infty}$. 于是, 存在 $z \in X$, 使

$$f^{n_i-1}(x) \to z, \quad i \to +\infty,$$

故 $z \in L_\omega(x)$ 且 $f^{n_i}(x) \to f(z)$, 由极限的唯一性知 $y = f(z)$, 即 $y \in f(L_\omega(x))$, 从而 (2.2.3) 式成立. □

命题 2.2.4 设同胚 h 是动力系统 (X, φ) 到 (Y, ψ) 的拓扑等价, 则

$$h(L_\omega^\varphi(p)) = L_\omega^\psi(h(p)), \quad \forall\, p \in X,$$

其中 $L_\omega^\varphi(p)$ 和 $L_\omega^\psi(h(p))$ 分别是动力系统 φ 和 ψ 的 ω 极限集.

证明留作习题. □

对 α 极限集, 亦有类似结论.

定义 2.2.4 设 $f: X \to X$ 连续, 点 $x \in X$ 称为是 f 的游荡点, 如果存在 x 的邻域 U, 使得 $f^{-n}(U)\,(n \geqslant 0)$ 是两两不交的. 如果点 $x \in X$ 不是游荡点, 则称为非游荡点. 其集合称为 f 的非游荡点集, 记作 $\Omega(f)$.

注 2.2.2 用 U_x 表示 x 的邻域, 则

$$\Omega(f) = \{x \in X \mid \forall U_x, \exists k \in \mathbf{N} \text{ 使 } f^{-k}(U_x) \cap U_x \neq \varnothing\}. \tag{2.2.4}$$

注 2.2.3 若 $f: X \to X$ 同胚, 则

$$\Omega(f) = \{x \in X \mid \forall U_x, \exists k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \text{ 使 } f^k(U_x) \cap U_x \neq \varnothing\}, \tag{2.2.5}$$

显然

$$f^{-k}(U) \cap U \neq \varnothing \Leftrightarrow U \cap f^k(U) \neq \varnothing.$$

定理 2.2.1 设 X 是紧致拓扑空间, $f: X \to X$ 连续, 则

(1) $L_\omega(f) \subseteq \Omega(f)$, 故 $\Omega(f) \neq \varnothing$.

(2) $\Omega(f)$ 是闭集.

(3) $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$; 若 f 是同胚, 则 $L_\alpha(f) \subseteq \Omega(f)$ 且 $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$.

证明 首先证结论(1). 当 X 紧致时 $L_\omega(f) \neq \varnothing$, 任取 $y \in L_\omega(f) = \bigcup_{x \in X} L_\omega(x)$, 应存在 $x \in X$ 使 $y \in L_\omega(x)$. 于是对 y 的任一邻域 U, 存在 m, $k \in \mathbf{N}$, $m > k$ 使

$$f^m(x), f^k(x) \in U,$$

从而

$$f^{-(m-k)}(U) \cap U \neq \varnothing,$$

故 $y \in \Omega(f)$, 结论(1)成立.

其次, 证结论(2). 只需证游荡点集 $X \setminus \Omega(f)$ 是开集. 设 $x \in X \setminus \Omega(f)$ 则存在 x 的邻域 U_x 使

$$f^{-n}(U_x) \cap f^{-m}(U_x) = \varnothing, \quad \forall n, m \in \mathbf{Z}_+, n \neq m.$$

任取 $x' \in U_x$ 则存在 $U_{x'} \subset U_x$, 使

$$f^{-n}(U_{x'}) \cap f^{-m}(U_{x'}) = \varnothing, \quad \forall n, m \in \mathbf{Z}_+, n \neq m,$$

即 x' 是游荡点, U_x 是游荡点集, 于是

$$X \setminus \Omega(f) = \bigcup_{x \in X} U_x$$

是开集, 故 $\Omega(f)$ 是闭集.

最后, 证结论(3). 任取 $x \in \Omega(f)$, 再任取 $f(x)$ 的一个邻域 U, 由 f 的连续性知 $f^{-1}(U)$ 是 x 的一个邻域. 由(2.2.4), 存在 $n \in \mathbf{N}$ 使

$$f^{-n}(f^{-1}(U)) \cap f^{-1}(U) \neq \varnothing,$$

从而

$$f^{-n}(U) \cap U \neq \varnothing, \quad \exists n \in \mathbf{N},$$

即 $f(x) \in \Omega(f)$, 由 x 的任意性知 $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$. 下设 $f: X \to X$ 同胚, 由注 2.2.3 知 $\Omega(f^{-1}) = \Omega(f)$. 对 f^{-1} 利用上证结论有

$$f^{-1}(\Omega(f^{-1}))\subset\Omega(f^{-1}),$$

从而

$$\Omega(f)\subset f(\Omega(f)),$$

故 $\Omega(f)$是 f 的不变集. □

在非游荡点 x 的附近,总可以找到一点 a,其一段轨道$\{a,f(a),\cdots,f^k(a)\}$的终点 $f^k(a)$仍在 x 的附近.

定理 2.2.2　设 X 是紧度量空间,$f:X\to X$ 连续,则

$$\Omega(f)=\{x\in X\mid\forall\, U_x \text{及} N>0,\exists\, n\geqslant N \text{使} f^{-n}(U_x)\cap U_x\neq\varnothing\}.$$

证明　记上式右端子集为 $\mathscr{A}$,显然 $\mathscr{A}\subseteq\Omega(f)$,下证

$$\Omega(f)\subseteq\mathscr{A},\tag{2.2.6}$$

于是结论成立.对任一 $x\in\Omega(f)$及 $N>0$,如果 x 是f 的周期点,显然 $x\in\mathscr{A}$;如果 x 不是f 的周期点,对 x 的任意给定的一个邻域U,取 $r>0$ 使球 $B(x,r)\subset U$,可以断言:$\exists\,\delta\in(0,r)$使

$$f^{-k}(B(x,\delta))\cap B(x,\delta)=\varnothing,\quad k=1,2,\cdots,N-1,\tag{2.2.7}$$

若其不然,对一切使$\frac{1}{n}<r$ 成立的n,存在 x_n 与$k_n\in\{1,2,\cdots,N-1\}$使

$$x_n\in f^{-k_n}\left(B\left(x,\frac{1}{n}\right)\right)\cap B\left(x,\frac{1}{n}\right),$$

从而

$$x_n\in B\left(x,\frac{1}{n}\right)\to x,(n\to\infty);\tag{2.2.8}$$

$$f^{k_n}(x_n)\in B\left(x,\frac{1}{n}\right)\to x,(n\to\infty).\tag{2.2.9}$$

由于 $k_n\in\{1,2,\cdots,N-1\}$对一切 $n>\frac{1}{r}$成立,故可选出子列$\{k_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$使 $k_{n_j}=k,1\leqslant k\leqslant N-1$,对一切 j 成立且 $n_j\to\infty,(j\to\infty)$,从而(2.2.9)式含有子列使

$$f^k(x_{n_j})\in B\left(x,\frac{1}{n_j}\right)\to x\quad(j\to\infty),$$

由 f 的连续性并联合(2.2.8)得 $f^k(x)=x$,与 x 不是f 的周期点相矛盾,故断言(2.2.7)式成立.但 $x\in\Omega(f)$,故存在 $n\geqslant N$ 使

$$f^{-n}(B(x,\delta))\cap B(x,\delta)\neq\varnothing.$$

由于 $B(x,\delta)\subseteq U$,从而(2.2.6)成立. □

注 2.2.4　若 X 是紧度量空间,$f:X\to X$ 同胚,由注 2.2.3 可知

$$\Omega(f)=\{x\in X\mid\forall\, U_x \text{及} N>0,\exists\, n\geqslant N \text{使} f^n(U)\cap U\neq\varnothing\}.$$

§2.3 轨道稠密性

本节通过极小性,传递性和混合性来讨论轨道在相空间中的稠密性问题.

定义 2.3.1 称动力系统 $f:X\to X$ 是极小的,如果对任一 $x\in X$,当 $f:X\to X$ 同胚时有 $\mathrm{Orb}_f(x)$ 在 X 中稠;当 $f:X\to X$ 连续时有 $\mathrm{Orb}_f^+(x)$ 在 X 中稠.

例 2.3.1 北极映射导出的动力系统不是极小的,因为 $\mathrm{Orb}(N)$ 和 $\mathrm{Orb}(S)$ 在 X 中不稠.

例 2.3.2 旋转映射 $f:T^2\to T^2$

$$f(([x],[y]))=([x+\alpha],[y+\beta])$$

当 α 和 β 有理无关,即对 $\forall k_1,k_2\in\mathbf{Z},k_1\cdot k_2\neq 0$ 使 $k_1\alpha+k_2\beta\neq 0$ 时,f 是极小的.

定义 2.3.2 动力系统 $f:X\to X$ 称为是拓扑混合的,如果对任意两个非空开集 $U,V\subset X$,存在 $N\in\mathbf{N}$ 当 $n>N$ 时有 $f^n(U)\cap V\neq\varnothing$.

较定义 2.3.1 和 2.3.2 弱的,是如下定义.

定义 2.3.3 称连续映射 $f:X\to X$ 为单边拓扑传递的,若存在 $x\in X$ 使 $\mathrm{Orb}^+(x)$ 在 X 内稠;若 $f:X\to X$ 同胚且存在 $x\in X$ 使 $\mathrm{Orb}(x)$ 在 X 内稠,则称 f 为拓扑传递的.

显然,f 的极小性可推出传递性.

例 2.3.3 在集合 $\left\{0,1,\dfrac{1}{n},1-\dfrac{1}{n}\mid n\geqslant 2\right\}$ 上取 $\mathbf{R}$ 导出的拓扑,定义 $f:X\to X$ 为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x=1,\\ \dfrac{1}{n+1}, & x=\dfrac{1}{n},n\geqslant 2,\\ 1-\dfrac{1}{n-1}, & x=1-\dfrac{1}{n},n>2.\end{cases}$$

取 $x\in X\setminus\{0,1\}$ 易知 $\mathrm{Orb}(x)$ 在 X 中稠,故是拓扑传递的.但是,f 不是单边拓扑传递的.

定理 2.3.1 设 X 是紧度量空间,$f:X\to X$ 同胚,则 f 为单边拓扑传递的充要条件是 f 拓扑传递,且 $\Omega(f)=X$.

证明 首先证必要性.设 f 是单边传递的,故存在 $x_0\in X$,使 $\mathrm{Orb}(x_0)$ 包含 X 中的稠子集 $\mathrm{Orb}^+(x_0)$,从而 f 是拓扑传递的.下证 $\Omega(f)=X$.若其不然,X 中必有游荡点,于是存在非空开集 U 使 $\{f^n(U)\mid n\in\mathbf{Z}\}$ 是两两不交的.

另一方面，由 $\mathrm{Orb}^+(x_0)$ 在 X 中稠，应存在 $n_0\geqslant 0$ 使 $f^{n_0}(x_0)\in U$，从而

$$f^{n+n_0}(x_0)\in f^n(U),\quad n=0,1,\cdots$$

在轨道 $\mathrm{Orb}^+(x_0)$ 中剩下 n_0 个点 $x_0,f(x_0),\cdots,f^{n_0-1}(x_0)$ 要分别属于无穷多个两两不相交的开集 $f^{-m}(U)$，$m\in\mathbf{N}$，是不可能的；故 $\Omega(f)=X$ 成立.

再证充分性. 显然，$f(X)=X$. 按下面将证明的定理 2.3.3，对 X 中任意的非空开集 U 和 V，若存在 $k\geqslant 1$ 使

$$f^{-k}(U)\cap V\neq\varnothing \tag{2.3.1}$$

成立，则 f 是单边拓扑传递的. 另一方面，由于 f 是拓扑传递的，利用下面的定理 2.3.2，应存在 $m\in\mathbf{Z}$ 使开集，

$$\boldsymbol{W}=f^m(U)\cap V\neq\varnothing. \tag{2.3.2}$$

若 $m<0$，则取 $k=-m\geqslant 1$ 有(2.3.1)成立；否则，由 $\Omega(f)=X$ 及定理 2.2.2，应存在 $n\geqslant m+1>0$ 使

$$f^{-n}(W)\cap \boldsymbol{W}\neq\varnothing,$$

代入(2.3.2)式定义的非空开集 W，自然有

$$f^{-(n-m)}U\cap V\neq\varnothing,$$

取 $k=n-m\geqslant 1$，上式即(2.3.1)成立，从而 f 是单边拓扑传递的. □

定理 2.3.2 设 X 是紧度量空间，$f:X\to X$ 同胚，则以下结论等价：

(1) f 是拓扑传递的.

(2)若 X 中的开集 U 是 f 的不变集，则 $U=\varnothing$，或者 U 在 X 中稠.

(3)对 X 中的任意非空开集 U 和 V，则存在 $n\in\mathbf{Z}$ 使

$$f^n(U)\cap V\neq\varnothing. \tag{2.3.3}$$

证明 (1)⇒(2) 设 f 是拓扑传递的，则存在 $x_0\in X$ 使 $\mathrm{Orb}(x_0)$ 在 X 中稠. 于是，对 X 中的非空开集 U，存在 $n_0\in\mathbf{Z}$，使 $f^{n_0}(x_0)\in U$. 再由(2)的条件 $f(U)=U$ 或 $U=f^{-1}(U)$，可知 X 中的稠子集

$$\mathrm{Orb}(x_0)=\{f^n(x_0)\mid n\in\mathbf{Z}\}\subset U,$$

故 U 在 X 中稠.

(2)⇒(3) 设结论(2)成立，且 U，V 是 X 中的非空开集，作 $B=\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty}f^n(U)$. 于是 B 是 X 中 f 不变的非空开集，故在 X 中稠，应有

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}f^n(U)\cap V\neq\varnothing,$$

则存在 $n\in\mathbf{Z}$ 使 (2.3.3)成立.

(3)⇒(1) 设结论(3)成立，取紧度量空间 X 的可列基 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$，作集合

$$F_n=\bigcup_{m=-\infty}^{+\infty}f^m(U_n),\quad n=1,2,\cdots$$

显然 $F_n(n=1,2,\cdots)$ 是 f 不变的非空开集，且由(2.3.3)知其在 X 中稠. 则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing.$$

否则,取其余集有

$$X = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} X \setminus F_n.$$

上式左端的非空完备度量空间 X 为第二纲集(Baire-Hausdorff 定理),右端为可列个稀疏集 $X \setminus F_n$ 的并是第一纲集,二者矛盾,故断言成立.取 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$,则存在 $m_n \in \mathbf{Z}$ 使

$$x_0 \in f^{m_n}(U_n), \qquad n = 1,2,\cdots$$

或

$$f^{-m_n}(x_0) \in U_n, \qquad n = 1,2,\cdots$$

即

$$\mathrm{Orb}(x_0) \cap U_n \neq \varnothing, \qquad n = 1,2,\cdots$$

而 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的可列基,故对 X 中的任一非空开集 V 有

$$\mathrm{Orb}(x_0) \cap V \neq \varnothing,$$

即 $\mathrm{Orb}(x_0)$ 在 X 中稠,从而 f 是拓扑传递的. □

定理 2.3.3 设 X 是紧度量空间,$f: X \to X$ 是连续的满射,则下述结论等价:

(1) f 是单边拓扑传递的.

(2) 对 X 中的任一开集 U,若 $f^{-1}(U) \subset U$,则 $U = \varnothing$,或者 U 在 X 中稠.

(3) 对 X 中任意的非空开集 U 和 V,则存在 $n \in \mathbf{N}$ 使

$$f^{-n}(U) \cap V \neq \varnothing. \tag{2.3.4}$$

证明 证(1)⇒(2) 只须证明结论(2)的等价命题:对 X 中的任一闭集 A,若 $A \subset f^{-1}(A)$ 则 $A = X$ 或者 A 是无处稠集.下设闭集 A 不是无处稠集,即存在 X 中的非空开集 U 使 $U \subset A$.由结论(1),存在 $x_0 \in X$,及 $k \geqslant 0$ 使

$$f^k(x_0) \in U \subset A,$$

从而

$$f^{k+1}(x_0) \in f(U) \subset f(A) \subset A,$$

由此归纳得

$$\{f^n(x_0) \mid n \geqslant k\} \subset A, \tag{2.3.5}$$

取其闭包有

$$\overline{\{f^n(x_0) \mid n \geqslant k\}} \subset A.$$

注意到 $\overline{\mathrm{Orb}^+(x_0)} = X$,上式左端为

$$\overline{\{f^n(x_0) \mid n \geqslant k\}} = X - \{x_0, f(x_0), \cdots, f^{k-1}(x_0)\},$$

再代入上式，得

$$A \cup \{x_0, f(x_0), \cdots, f^{k-1}(x_0)\} = X.$$

用 f 作用该式 k 次，注意到 f 满足(2.3.5)式，可得 $A = X$，故结论(2)成立.

其余证明类似于定理 2.3.2 中的证明. □

由定理 2.3.2 立即得到如下定理.

定理 2.3.4　设 X 是紧度量空间，$f: X \to X$ 同胚，且拓扑混合，则 f 是拓扑传递的.

§2.4　线段自映射

设 $I = [0,1]$，$f: I \to I$ 连续，称系统(I, f)为线段连续系统，表示为$(I, f) \in C^0$. 一个自然的问题是：如果 f 具有一个 k 周期点，那么 f 是否还有其他 $m \neq k$ 的周期点. 1964 年乌克兰数学家沙尔可夫斯基(A. H. Шарковскии 或 Sarkovskii[21])发现了一个相当完美的结果，指出 f 的周期点的周期呈现出相当整齐的规律性. 但这一结论长期鲜为外人所知，直到 1977 年斯捷凡(P. Stefan)[22]纠正原文一些不妥之处后用英文介绍出来为止. 此前，1975 年华人李天岩在美国马里兰大学攻博期间与其导师 J. Yorke 发表了一篇震动学林的论文[23]，第一次从数学上提出了混沌的精确定义. 他们的工作引发了一维动力系统至今不衰的研究和蓬勃发展[24~28].

定义 2.4.1　称自然数集 $\mathbf{N}$ 的排列

$$\begin{aligned}
&3 \lhd 5 \lhd 7 \lhd 9 \lhd \cdots \\
&\lhd 2 \cdot 3 \lhd 2 \cdot 5 \lhd 2 \cdot 7 \lhd 2 \cdot 9 \lhd \cdots \\
&\lhd 2^2 \cdot 3 \lhd 2^2 \cdot 5 \lhd 2^2 \cdot 7 \lhd 2^2 \cdot 9 \lhd \cdots \\
&\cdots \\
&\cdots\cdots \lhd 2^4 \lhd 2^3 \lhd 2^2 \lhd 2 \lhd 1
\end{aligned}$$

为 Sarkovskii 序，对 $\alpha \lhd \beta$ 称 β 在 α 之后(或 α 在 β 之前).

f 所有周期点的周期的集合，记为 $\mathrm{PP}(f)$.

定理 2.4.1 (Sarkovskii 定理)　设$(I, f) \in C^0$，若 $m \in \mathrm{PP}(f)$且 $m \lhd n$，则 $n \in \mathrm{PP}(f)$.

目前，已有不少 Sarkovskii 定理的简化证明，其中一种用图论方法作出的简洁证明被 L. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz 和 L. S. Young[29]给出，这里不再叙述.

由 Sarkovskii 定理直接得到如下推论.

推论 2.4.1 设$(I,f)\in C^0$，且$3\in \mathrm{PP}(f)$，则对所有的$n\in \mathbf{N}$，有$n\in \mathrm{PP}(f)$. □

下面介绍 Li-Yorke 定理时，将给出推论 2.4.1 的一种直接的证明.

称 I 上的一个闭子区间为一个线段，记为 J、K、L 等，下面给出 f 作用其上的性质.

引理 2.4.1 $f(K)\supset L$ 的充要条件是，存在 $J=[r,\delta]\subset K$，使 $f(J)=L$ 且J 是极小的，即不存在 J 的真子线段J_1 使 $f(J_1)=L$ 成立.

证明 充分性是显然的，下证必要性. 设 $f(K)\supset L$，记 $L=[\sigma,\tau]$，故存在 $\alpha,\beta\in K$ 使

$$f(\alpha)=\sigma, f(\beta)=\tau.$$

不妨设 $\alpha<\beta$. 记

$$r=\sup\{\zeta\in K\mid \zeta<\beta, f(\zeta)=\sigma\},$$
$$\delta=\inf\{\zeta\in K\mid \alpha<\zeta, f(\zeta)=\tau\}.$$

令 $J=[r,\delta]$. 由于连续映射 f 映线段(连通集)为线段，故 J 为所求. □

引理 2.4.2 若 $f(K)\supset K$，则存在 $x\in \mathrm{Fix}(f)\cap K$.

证明 记$K=[\sigma,\tau]$，由引理2.4.1存在极小线段$J=[\alpha,\beta]\subset K$使$f(J)=K$，不妨设

$$f(\alpha)=\sigma\leqslant\alpha<\beta\leqslant\tau=f(\beta),$$

考虑连续函数 $f(x)-x$ 在J 的两端点α 和β 上的值

$$f(\alpha)-\alpha\leqslant 0,\quad f(\beta)-\beta\geqslant 0,$$

故存在 $\zeta\in J$ 使$f(\zeta)-\zeta=0$，即结论成立. □

引理 2.4.3 设线段序列 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 满足条件$f(I_j)\supset I_{j+1}$, $j=1,2,\cdots,n-1$, $f(I_n)\supset I_1$，则存在 $x\in \mathrm{Fix}(f^n)\cap I_1$ 使得 $f^{j-1}(x)\in I_j$, $j=1,2,\cdots,n$.

证明 由引理2.4.1，归纳可证I_1内存在线段$J_1\supset J_2\supset\cdots\supset J_n$，使得$f^j(J_j)=I_{j+1}$, $j=1,\cdots,n-1$，而 $f^n(J_n)=I_1\supset J_n$，据引理 2.4.2，存在 $x\in \mathrm{Fix}(f^n)\cap J_n$，由此可证结论成立. □

f 的任意一条三周期轨道总可以适当重新编号为下面两种情况之一：

$$x_0<x_1<x_2 \quad 或 \quad x_0>x_1>x_2,$$

其中 $x_1=f(x_0)$, $x_2=f(x_1)$. 下面定理的条件比 $3\in\mathrm{PP}(f)$稍弱.

定理 2.4.2 设$(I,f)\in C^0$，若存在 $x_0\in I$ 使得

$$x_3\leqslant x_0<x_1<x_2 或 x_3\geqslant x_0>x_1>x_2, \tag{2.4.1}$$

其中 $x_1=f(x_0)$, $x_2=f(x_1)$及 $x_3=f(x_2)$，则 $k\in\mathrm{PP}(f)$，对任一 $k\in\mathbf{N}$ 成立.

证明 设(2.4.1)第一式成立，又记 $K_1=[x_0,x_1]$, $K_2=[x_1,x_2]$显然

$$f(K_1) \supseteq K_2, \quad f(K_2) \supseteq K_1 \cup K_2.$$

由引理 2.4.2,存在 $p \in \mathrm{Fix}(f) \cap K_2$,即 $k=1$ 时有 $k \in \mathrm{PP}(f)$. 下设 $k>1$,作线段

$$I_k = K_1, \quad I_j = K_2, \quad j = 1,2,\cdots,k-1.$$

易知,其满足引理 2.4.3 的条件,故存在

$$p \in \mathrm{Fix}(f^k) \cap K_2, \quad \forall k > 1, \tag{2.4.2}$$

使得

$$f^{j-1}(p) \in I_j, \quad j = 1,2,\cdots,k \tag{2.4.3}$$

下证 k 是点 p 的周期. 首先,容易核验如下断言:如果点 p 有周期 $n \leqslant k$,那么

$$f^k(p) = p \Leftrightarrow p \text{ 的周期 } n \text{ 能整除 } k. \tag{2.4.4}$$

于是, 当 $k=2$ 或 3 时, 如果点 p 有小于 k 的周期, 那么 $p \in \mathrm{Fix}(f)$. 再由(2.4.2)和(2.4.3)知

$$p \in K_1 \cap K_2 = \{x_1\},$$

这与条件 $f(x_1)=x_2>x_1$ 矛盾. 故 $k=2,3$ 时,有 $k \in \mathrm{PP}(f)$成立. 于是,不妨设 $x_0<x_1<x_2$ 是 f 的三周期点. 下证 $k>3$ 是点 p 的周期.

若其不然,存在 $s \in \mathbf{N}, s<k$ 是点 p 的周期. 由(2.4.4)式,存在 $m \in \mathbf{N}$ 使 $k=s \cdot m$. 记 $p_j = f^j(p), j=1,2,\cdots,k-1$. 于是轨道

$$p, p_1, p_2, p_3, \cdots, p_{k-1} \tag{2.4.5}$$

由 m 段 s 周期轨道 $p, p_1, \cdots, p_{s-1}$ 连接而成,从而 $p_{k-1}=p_{s-1}$. 由(2.4.3)有 $p_{s-1} \in K_2$, $p_{k-1} \in K_1$,即

$$p_{k-1} \in K_2 \cap K_1 = \{x_1\},$$

亦即 $p_{k-1}=x_1$,从而 $p=x_2$, $p_1=x_0$. 当 $k>3$时,按(2.4.3),$p_1 \in K_2$,与 $x_0 \overline{\in} K_2$ 矛盾,故所设整数 s 是不存在的,从而 $k>3$ 时有 $k \in \mathrm{PP}(f)$. □

定理 2.4.2 是 Li-Yorke 定理的前一部分,下面介绍后一部分. 前一部分是 Sarkovskii 定理的特款,但后部分却指出了周期三蕴涵混沌的重要事实.

定义 2.4.2 设(X,f)是紧致度量系统,d 是 X 的一个度量,称 f 在 X 上是混沌的,若存在不可数集合 $S \subset X$ 满足如下条件:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup d(f^n(x), f^n(y))>0, \quad \forall x,y \in S, x \neq y$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf d(f^n(x), f^n(y))=0, \quad \forall x,y \in S$.

其中,S 称为f 的混沌集.

定义 2.4.3 设 d 是X 的度量,称点 $x \in X$ 是f 的渐近周期点,若

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) = 0, \quad \exists p \in \mathrm{Per}(f)$$

成立.

命题 2.4.1 设(X,f)是紧致度量系统,d为X上的一个度量,若S是f的混沌集,则f在S内至多只有一个渐近周期点.

证明 设$x,y\in S,x\neq y$是f在S内的两个不同的渐近周期点,于是存在$p,q\in \mathrm{Per}(f)$使

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x),f^n(p)) = 0; \tag{2.4.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(y),f^n(q)) = 0. \tag{2.4.7}$$

若$p=q$,则

$$0\leqslant d(f^n(x),f^n(y))\leqslant d(f^n(x),f^n(p))+d(f^n(p),f^n(y)),$$

联合(2.4.6)和(2.4.7)式与定义2.4.2的条件(1)矛盾.

若$p\neq q$,记

$$\varepsilon = \min\{d(u,v)\mid u,v\in \mathrm{Orb}(p)\cup \mathrm{Orb}(q),u\neq v\}.$$

显然$\varepsilon>0$,且可以证明

$$\inf(d(f^n(x),f^n(y)))\geqslant \varepsilon>0$$

与定义(2.4.2)的条件(2)矛盾,故命题结论成立. □

在介绍Li-Yorke定理中混沌集的存在性之前,先给出如下引理.

引理 2.4.4 设$g\in C^0(I)$,而闭线段序列$\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$满足条件

$$M_n\subset I,\quad M_{n+1}\subset g(M_n),\quad \forall n\in \mathbf{N},$$

则存在闭线段序列$\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$使

$$Q_{n+1}\subset Q_n\subset M_0,\quad g^n(Q_n)=M_n,\quad \forall n\in \mathbf{N},$$

且$Q=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}Q_n$是单点集或闭线段,当$x\in Q$时,$g^n(x)\in M_n$对任一$n\in\mathbf{N}$成立.

证明 用数学归纳法据引理2.4.1可证. □

定理 2.4.3 设$(I,f)\in C^0$,若存在$x_0\in I$使条件(2.4.1)成立,则在$I\setminus \mathrm{Per}(f)$中存在混沌集$S$使

$$\limsup_{n\to\infty}|(f^n(x)-f^n(p)|>0,\quad \forall x\in S,p\in \mathrm{Per}(f) \tag{2.4.8}$$

成立,即S中不含f的渐近周期点.

证明 采用定理2.4.2中的记号,其中$K_1=[x_0,x_1]$,$K_2=[x_1,x_2]$.由于

$$f^2(K_1)\supset f(K_2)\supset K_1,$$

$$f^2(K_2)\supset f(K_1)\supset K_2,$$

据引理2.4.1,存在闭线段$J_1\subset K_1,J_2\subset K_2$使

$$f^2(J_1)=K_1,\quad f^2(J_2)=K_2,\quad J_1\cap J_2=\varnothing,$$

于是

$$f^4(J_1) \cap f^4(J_2) \supset K_1 \cup K_2 \supset J_1 \cup J_2. \tag{2.4.9}$$

令 $g = f^4$，只需对 g 证明定理的结论即可.

Step1　记

$$J_1 = [\underline{m}_1, \overline{m}_1], \quad J_2 = [\underline{m}_2, \overline{m}_2],$$

其中 $0 \leqslant \underline{m}_1 < \overline{m}_1 < \underline{m}_2 < \overline{m}_2 \leqslant 1$. 据引理 2.4.1 并利用(2.4.9)式，可归纳地证明：存在闭区间套

$$J_2 \supset [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

使

$$g(a_0) = \underline{m}_2, \quad g(b_0) = \overline{m}_2,$$

$$g(a_{n+1}) = a_n, g(b_{n+1}) = b_n, \quad n = 0, 1, 2 \cdots$$

且存在 $\underline{m}_2 < s < a_0$（或 $\overline{m}_2 > s > b_0$），不妨设 $s < a_0$，使

$$g(s) \leqslant \underline{m}_1, \tag{2.4.10}$$

于是，存在 $a^*, b^* \in I$ 使

$$a^* = \lim_{n \to \infty} a_n, \qquad b^* = \lim_{n \to \infty} b_n.$$

显然，$f([a^*, b^*]) = [a^*, b^*]$，且由于(2.4.10)有

$$g([x_1, a^*]) \supset J_1.$$

Step2　对任一 $r \in (0,1)$，归纳地构造闭线段序列 $E^r = \{M^r(n)\}_{n=0}^{\infty}$.

设 $l_0 \in \mathbf{N}$ 是使 $l_0 r$ 的整数部分 $[l_0 r] = 1$ 的最小正整数，记

$$E^r(l_0^2) = \{M^r(0), \cdots, M^r(l_0^2)\},$$

使

$$M^r(j) = \begin{cases} J_2, & 0 \leqslant j < l_0^2, \\ J_1, & j = l_0^2. \end{cases}$$

设 $l > l_0$ 时，$E^r(l^2) = \{M^r(0), \cdots M^r(l^2)\}$ 已有定义，令

$$E^r((l+1)^2) = \{M^r(0) \cdots, M^r(l^2), M^r(l^2+1), \cdots, M^r((l+1)^2)\},$$

其中 $M^r(0), \cdots, M^r(l^2)$ 与 $E^r(l^2)$ 中的对应项相同，而

$$M^r(l^2 + j) = \begin{cases} [a_{2l-j-1}, a^*], & j = 1, 2, \cdots, 2l-1, \\ [\underline{m}_2, a^*], & j = 2l, \end{cases}$$

$$M^r((l+1)^2) = \begin{cases} J_1, & [(l+1)r] - [lr] = 1, \\ M^r(l^2 + 2l), & [(l+1)r] - [lr] = 0. \end{cases}$$

显然，$[(l+1)r] - [lr] \in \{0, 1\}$. 于是完成 E^r 的归纳定义. 记

$$P(E^r, l^2) = \mathrm{Card}(\{M^r(n) \in E^r(l^2) \mid M^r(n) \subseteq J_1, n = 0, 1, \cdots, l^2\}).$$

由 $E^r(l^2)$ 的归纳定义，易于证明

$$P(E^r, l^2) = [lr], \qquad \forall\, l \in \mathbf{N}.$$

由于

$$(l-k)r \leqslant [lr] \leqslant lr,$$

其中 k 是某个正整数，于是

$$\lim_{l\to\infty} \frac{P(E^r, l^2)}{l} = \lim_{l\to\infty} \frac{[lr]}{l} = r. \tag{2.4.11}$$

同时，可以证明：当 $0<r_1<r_2<1$ 时，对任一 $N\in\mathbf{N}$，存在 $l\in\mathbf{N}$，使

$$[(l+1)r_1] - [lr_1] \neq [(l+1)r_2] - [lr_2]. \tag{2.4.12}$$

若其不然，存在 $N\in\mathbf{N}$ 使

$$[(l+1)r_1] - [lr_1] = [(l+1)r_2] - [lr_2], \quad \forall\, l > \mathbf{N}$$

成立．由 E^r 的归纳定义可知，$[lr_1]$ 和 $[lr_2]$ 最多相差一个常数，将其代入(2.4.11)可得 $r_1=r_2$ 与 $r_1<r_2$ 矛盾，故(2.4.12)成立．由此，存在自然数序列

$$l_1 < l_2 < \cdots < l_n < \cdots$$

使

$$[(l_n+1)r_1] - [l_n r_1] \neq [(l_n+1)r_2] - [l_n r_2], \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \tag{2.4.13}$$

成立．

Step3 由 E^r 的归纳定义知其满足引理 2.4.4 的条件，故存在闭线段序列 $\{Q_n^r\}_{n=0}^{\infty}$ 使

$$Q_{n+1}^r \subset Q_n^r \subset J_2, \quad g^n(Q_n^r) = M^r(n), \quad \forall\, n \in \mathbf{Z}_+. \tag{2.4.14}$$

显然

$$x^r \in Q^r = \bigcap_{n=0}^{\infty} Q_n^r \Rightarrow g^n(x^r) \in M^r(n), \quad \forall\, n \in \mathbf{Z}_+, \tag{2.4.15}$$

其中 Q^r 或是单点集，或是闭线段．对满足(2.4.12)的 l 有

$$M^{r_1}((l+1)^2) \cap M^{r_2}((l+1)^2) = \varnothing.$$

结合(2.4.14)有

$$Q_{(l+1)^2}^{r_1} \cap Q_{(l+1)^2}^{r_2} = \varnothing$$

或

$$Q^{r_1} \cap Q^{r_2} = \varnothing, \qquad r_1 \neq r_2.$$

因此，至多只有可数个 $r\in(0,1)$ 使 Q^r 不是单点集．记

$$S = \{x^r \in I \mid r \in (0,1) \text{ 且 } Q^r \text{ 是单点集}\},$$

则 S 是不可数集合，且 $S\subset I\setminus \mathrm{Per}(g)$．

Step4 证 S 是混沌集．

首先,设 $x^{r_1}, x^{r_2} \in S, 0 < r_1 < r_2 < 1$,由(2.4.13),(2.4.15)和 $M^r(n)$ 的定义,有

$$|g^{(l_n+1)^2}(x^{r_1}) - g^{(l_n+1)^2}(x^{r_2})| \geqslant d(J_1, J_2) > 0, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

因此,

$$\limsup_{n\to+\infty} |g^n(x^{r_1}) - g^n(x^{r_2})| \geqslant d(J_1, J_2) > 0,$$

其中 $d(J_1, J_2)$ 表示 J_1 与 J_2 的距离.

其次,设 $x^{r_1}, x^{r_2} \in S, 0 < r_1 \leqslant r_2 < 1$. 由 E^r 的构造性定义,有

$$M^{r_1}(l^2+1) = M^{r_2}(l^2+1) = [a_{2l-2}, a^*].$$

由(2.4.15),有

$$g^{l^2+1}(x^{r_1}), g^{l^2+1}(x^{r_2}) \in [a_{2l-2}, a^*].$$

因此,由 $a_{2l-2} \to a^* (l \to +\infty)$ 有

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} |g^n(x^{r_1}) - g^n(x^{r_2})| &\leqslant \lim_{l\to\infty} |g^{l^2+1}(x^{r_1}) - g^{l^2+1}(x^{r_2})| \\ &\leqslant \lim_{l\to\infty} |a^* - a_{2l-2}| = 0,\end{aligned}$$

故 S 是混沌集.

Step5 证 S 中不含 g 的渐进周期点.

设 $x^r \in S, 0 < r < 1$. 由(2.4.15)式,易见存在无穷多个 n,使

$$g^n(x^r) \in J_1,$$

又存在无穷多个 n,使

$$g^n(x^r) \in J_2,$$

故

$$\limsup_{n\to+\infty} |g^n(x^r) - g^n(p)| > 0, \quad \forall x^r \in S, p \in \mathrm{Per}(g),$$

即 x^r 不是 g 的渐近周期点.

综上所述,定理证毕. □

§2.5 圆周自同胚

在研究紧致低维流形上的动力系统时,覆盖空间和提升映射[30,31]是非常有用的拓扑工具. 本节采用将圆周自映射提升为直线自映射的方法,研究圆周自同胚动力系统的性质,给出轨道周期点的存在条件,非游荡点集的构造和自同胚的拓扑分类,并介绍 Denjoy[32]定理.

称单位模复数的集合

$$S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$$

为圆周.

定义 2.5.1 称连续映射 $E:\mathbf{R}\to S^1$ 为圆周 S^1 上的覆盖映射,如果对任意的 $z\in S^1$ 存在 z 的开邻域 W_z,使得

$$E^{-1}(W_z)=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha,$$

其中 $U_\alpha(\alpha\in\Gamma)$是不相交的开集,且对每一个 $\alpha\in\Gamma$,$E|_{U_\alpha}$是从 U_α 到 W_z 上的同胚,又称 $\mathbf{R}$ 是 S^1 的覆盖空间,W_z 为允许开邻域.

命题 2.5.1 定义 $E:\mathbf{R}\to S^1$ 为

$$E:x\mapsto e^{2\pi ix},\quad \forall x\in\mathbf{R},\tag{2.5.1}$$

则 $E:\mathbf{R}\to S^1$ 是覆盖映射.

证明 对任一 $z\in S^1$,取 z 的开邻域

$$W_z=S^1\setminus\{-z\},$$

使得

$$E^{-1}(W_z)=\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\left(z+k-\frac{1}{2},z+k+\frac{1}{2}\right),$$

则开集簇$\left\{\left(z+k-\frac{1}{2},z+k+\frac{1}{2}\right)\mid k\in\mathbf{Z}\right\}$即为使 E 成为覆盖映射所要求的开集簇. □

定义 2.5.2 设 $E:\mathbf{R}\to S^1$ 是覆盖映射,若 $f:S^1\to S^1$ 和 $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续映射,且满足

$$E\circ F=f\circ E,$$

则称 F 为 f 的提升.

在拓扑学中,有如下一般的定义和结论.

定义 2.5.3 设 $\tilde{X}$和 X 为 Hausdorff 拓扑空间,称 $\pi:\tilde{X}\to X$ 为覆盖映射,若对任意的 $x\in X$,存在 x 的邻域 V 及每个 $\tilde{x}_\alpha\in\pi^{-1}(x)$的邻域 U_α,使得 $\pi:U_\alpha\to V$ 是同胚,且 $\pi^{-1}(V)$是两两不交的 U_α 的并;此时,又称$(\tilde{X},\pi)$或 $\tilde{X}$ 为 X 的覆盖空间.特别,当 $\tilde{X}$是单连通时,称$(\tilde{X},\pi)$或 $\tilde{X}$为 X 的万有覆盖.

显然,$(\mathbf{R},E)$是 S^1 的万有覆盖.

定义 2.5.4 设$(\tilde{X},\pi_X)$和$(\tilde{Y},\pi_Y)$分别是 X 和 Y 的覆盖空间,称映射 $F:\tilde{X}\to\tilde{Y}$是映射 $f:X\to Y$ 的一个提升,若

$$\pi_Y\circ F=f\circ\pi_X$$

成立.

关于提升的存在性,有如下引理.

引理 2.5.1 若 $\tilde{X}$是 Hausdorff 流形 X 的覆盖空间,则每个连续映射 f:

$\tilde{X}\to X$ 都有一个连续的提升 $F:\tilde{X}\to\tilde{X}$.

覆盖空间$(\tilde{X},\pi)$上的一个自同构 $h:\tilde{X}\to\tilde{X}$,如果满足 $\pi=\pi\circ h$,,则称 h 为$\tilde{X}$上的覆盖变换;所有覆盖变换按映射复合运算作成的群称为覆盖变换群,记作 $H_{\tilde{X}}$.

关于提升之间的关系,有如下引理.

引理 2.5.2 若 X 和 Y 是 Hausdorff 流形,F_1 和 $F_2:\tilde{X}\to\tilde{Y}$同为连续映射 $f:X\to Y$ 的提升,则存在唯一的覆盖变换 $h\in H_{\tilde{Y}}$,使得

$$F_1=h\circ F_2,$$

且对任意的 $h\in H_{\tilde{Y}}$,使 $h\circ F_2$是 f 的一个提升.

沿用命题 2.5.1 中的记号.

定理 2.5.1 设 $f:S^1\to S^1$ 是连续映射,则

(1)存在 f 的提升 $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续.

(2)提升 F 满足

$$F(x+1)-F(x)=k(\mathrm{const})\in\mathbf{Z}.$$

(3)对任意的 $k\in\mathbf{Z}$,定义 $F+k:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为

$$F+k:x\mapsto F(x)+k,\quad\forall x\in\mathbf{R},$$

则 $F+k$ 也是f 的提升,并且对 f 的任意提升F_1 和 F_2 有

$$F_1(x)-F_2(x)=l(\mathrm{const})\in\mathbf{Z}.$$

证明 由引理 2.5.1 知结论(1)成立.另一方面,由

$$E\circ F=f\circ E,$$

有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}F(x+1)}&=E\circ F(x+1)=f\circ E(x+1)\\&=f\circ E(x)=E\circ F(x)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}F(x)}.\end{aligned}$$

于是

$$F(x+1)-F(x)\in\mathbf{Z};$$

再考虑到 $F(x+1)-F(x)$是 x 的连续函数,故存在常数 $k\in\mathbf{Z}$ 使

$$F(x+1)-F(x)=k(\mathrm{const})\in\mathbf{Z}$$

成立,即结论(2)成立.

设 F_1 和 F_2 是 f 的提升,于是

$$E\circ F_1=f\circ E=E\circ F_2,$$

即

$$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}F_1(x)}=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}F_2(x)},\quad\forall x\in\mathbf{R},$$

可得

$$F_1(x) - F_2(x) \in \mathbf{Z}.$$

类似可证 $F_1(x) - F_2(x)$是一整常数. 又 $F + k$ 显然是 f 的提升, 故结论(3)成立. □

由该定理可知, 对连续映射 $f: S^1 \to S^1$, 常数

$$k = F(x+1) - F(x) \in \mathbf{Z}$$

是不依赖于提升 F 的选取和变元 x 的, 而仅由 f 唯一确定.

定义 2.5.5 设 $f: S^1 \to S^1$ 连续, 称常数

$$k = F(x+1) - F(x)$$

为映射 f 的映射度, 记为 $\deg(f) = k$.

定理 2.5.2 有如下结论

(1)对恒同映射 $id: S^1 \to S^1$, 有 $\deg(id) = 1$.

(2)设 $f, g: S^1 \to S^1$ 连续, 则

$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g).$$

(3)设 $h: S^1 \to S^1$ 同胚, 则

$$\deg(h) = \deg(h^{-1}) = \pm 1.$$

证明 首先, 恒同映射 $id_R: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是 $id: S^1 \to S^1$ 的提升, 由

$$\deg(id) = (x+1) - x = 1,$$

知结论(1)成立. 其次, 设 F 和 G 分别是 f 和 g 的提升, 易知 $F \circ G$ 是 $f \circ g$ 的提升; 由定义, 有

$$F(x+m) - F(x) = m \cdot \deg(f), \quad m \in \mathbf{Z}.$$

于是

$$F \circ G(x+1) = F(G(x) + \deg(g)) = F \circ G(x) + \deg(g) \cdot \deg(f),$$

由此知结论(2)成立. 最后, 由

$$\deg(h) \cdot \deg(h^{-1}) = \deg(h \circ h^{-1}) = \deg(id) = 1,$$

知结论(3)成立. □

定义 2.5.6 称同胚映射 $h: S^1 \to S^1$ 为保向的(或反向的), 如果 $\deg(h) = 1$(或 -1).

命题 2.5.2 设 $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是同胚映射 $h: S^1 \to S^1$的提升, 则 h 为保向的充要条件是 $F - id$ 为周期 1 的连续映射.

证明 事实上, 由

$$\begin{aligned}&(F(x+1) - k(x+1)) - (F(x) - kx) \\ &= F(x+k) - F(x) - k, \quad \forall x \in \mathbf{R},\end{aligned}$$

知 $F(x) - kx$ 是周期 1 的函数, 必须且只须

$$F(x+1) - F(x) = k, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

故结论成立. □

下面采用旋转数理论讨论圆周自同胚周期轨道的存在条件.

设 $f:S^1\to S^1$ 为保向同胚,由命题 2.5.2, f 可以提升为严格单增的连续函数 $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,使

$$F(x+1)=F(x)+1,\quad \forall x\in\mathbf{R},\tag{2.5.2}$$

显然

$$F^n(x+k)=F^n(x)+k,\quad \forall x\in\mathbf{R}.\tag{2.5.3}$$

命题 2.5.3 设 $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是保向同胚 $f:S^1\to S^1$ 的任一提升,则极限

$$\rho(F)=\lim_{n\to+\infty}\frac{F^n(x)-x}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{F^n(x)}{n},\quad \forall x\in\mathbf{R}$$

存在,且不依赖于 x 的选取.又如果 $F_1=F+l$, $l\in\mathbf{Z}$,则

$$\rho(F_1)=\rho(F)+l.$$

证明 任给 $m\in\mathbf{N}$,由(2.5.3)知 $F^m(x)-x$ 是周期 1 函数,且

$$F^m(x)\leqslant F^m(y)\leqslant F^m(x+1)\leqslant F^m(x)+1,\quad \forall x\in\mathbf{R},$$

其中 $x<y<x+1$ 或

$$F^m(x)-x-1\leqslant F^m(y)-y\leqslant F^m(x)-x+1,$$

即

$$|(F^m(y)-y)-(F^m(x)-x)|\leqslant 1.\tag{2.5.4}$$

记

$$\alpha_m=\inf_{\mathbf{R}}(F^m(x)-x),\quad \beta_m=\sup_{\mathbf{R}}(F^m(x)-x),$$

由(2.5.4)有

$$0\leqslant\frac{\beta_m-\alpha_m}{m}\leqslant\frac{1}{m}\to 0\quad (m\to+\infty).\tag{2.5.5}$$

又设 $n=qm+r$, $0\leqslant r<m$,在

$$\alpha_m\leqslant F^m(y)-y\leqslant\beta$$

中,取 y 为 $F^{(p-1)m}(y)$,得

$$\alpha_m\leqslant F^{pm}(y)-F^{(p-1)m}(y)\leqslant\beta_m.$$

对 $p=1,2,\cdots,q$ 求和,并令 $y=F^r(x)$有

$$q\alpha_m\leqslant F^{qm+r}(x)-F^r(x)\leqslant q\beta_m.\tag{2.5.6}$$

类似地,有

$$r\alpha_1\leqslant F^r(x)-x\leqslant r\beta_1.\tag{2.5.7}$$

联合(2.5.6)和(2.5.7),有

$$\frac{q\alpha_m+r\alpha_1}{qm+r}\leqslant\frac{F^n(x)-x}{n}\leqslant\frac{q\beta_m+r\beta_1}{qm+r}.$$

令 $n\to+\infty$,当 $n\to+\infty$时有 $q\to+\infty$,得

$$\frac{\alpha_m}{m} \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \frac{F^n(x)-x}{n} \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{F^n(x)-x}{n} \leqslant \frac{\beta_m}{m}.$$

注意到(2.5.5),有极限 $\rho(F)$存在且

$$\frac{\alpha_m}{m} \leqslant \lim_{n+\infty} \frac{F^n(x)-x}{n} \leqslant \frac{\beta_m}{m}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

对另一 $x' \in \mathbf{R}$,亦有上式成立,联系(2.5.5)可证

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(x)-x}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(x')-x'}{n},$$

即极限 $\rho(F)$与 x 的选取无关.

又如果提升 $F_1 = F + l$,归纳可证

$$F_1^n(x) = F^n(x) + nl,$$

从而

$$\rho(F_1) = \rho(F) + l$$

成立. □

定义 2.5.7 设连续映射 $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是保向同胚 $f:S^1\to S^1$ 的任一提升,称

$$\rho(F)(\mathrm{mod}\mathbf{Z})$$

为 f 的旋转数,记为 $\rho(f)=\rho(F)(\mathrm{mod}\mathbf{Z})$.

注 2.5.1 旋转数是保向拓扑共轭的不变量,即,如果 $f, g, h: S^1\to S^1$ 均为保向同胚,且 $h\circ f = g\circ h$,那么 $\rho(f)=\rho(g)(\mathrm{mod}\mathbf{Z})$.

定理 2.5.3 保向同胚 $f:S^1\to S^1$ 具有周期为 p 的周期点,当且仅当

$$\rho(f) = q/p(\mathrm{mod}\mathbf{Z}),$$

其中 p 与 q 互素, $p>0$.

证明 首先,设存在 $\zeta\in S^1$ 使

$$f^p(\zeta) = \zeta,$$

而存在 $x\in\mathbf{R}$,使 $E(x)=\zeta$.由

$$E\circ F^p(x) = f^p\circ E(x) = f^p(\zeta) = \zeta = E(x),$$

得

$$F^p(x) = x + q, \quad \exists q \in \mathbf{Z}. \tag{2.5.8}$$

利用(2.5.3)归纳可证

$$F^{np}(x) = x + nq,$$

从而

$$\rho(F) = \lim_{n\to+\infty} \frac{F^{np}(x)}{np} = \frac{q}{p},$$

故

$$\rho(f) = \frac{q}{p}(\mathrm{mod}\mathbf{Z}).$$

可断言$(p,q)=1$,即 p 与 q 互素;否则,$(p,q)=k>1$,那么

$$p = kp', \quad q = kq', \quad 0 < p' < p.$$

存在 $l \in \mathbf{Z}$,使

$$x + l < F^{p'}(x) < x + l + 1,$$

归纳可证

$$F^{(t-1)p'}(x) + l < F^{tp'}(x) < F^{(t-1)p'}(x) + l + 1, \quad t = 1,2,\cdots,k.$$

对上式按 $t=1,2,\cdots,k$ 作和得

$$kl < F^{kp'}(x) - x < k(l + 1),$$

与(2.5.8)式相比较,代入 $q=kq'$,得

$$l < q' < l + 1,$$

与 $q' \in \mathbf{Z}$ 矛盾,故$(p,q)=1$.

其次,设 $\rho(f)=q/p(\mathrm{mod}\mathbf{Z})$. 当 $f:S^1 \to S^1$ 是保向同胚时,由命题2.5.2知 $F(x)-x$ 为周期 1 连续映射,再由(2.5.3)知 $F^n(x)-x$ 也为周期 1 映射. 下证:存在 $y_0 \in [0,1]$,使

$$F^p(y_0) = y_0 + q, \tag{2.5.9}$$

从而,由 $E \circ F^p(y_0)=f^p \circ E(y_0)$,知 $E(y_0)$是 f 的 p 周期点.

若(2.5.9)式不成立,即对任给的 $y \in [0,1]$,不妨设有

$$F^p(y) - y > q,$$

由 $F^p(y)-y$ 是周期 1 映射,故上式在 $\mathbf{R}$ 上成立. 再由其连续性,存在 $\beta>0$,使

$$F^p(t) - t > q + \beta, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

由 f 保向,可要求 F 严格单增,故递推可证

$$F^{kp}(t) - t > k(q + \beta), \quad \forall k \in \mathbf{N}, t \in \mathbf{R},$$

从而

$$\frac{F^{kp}(t) - t}{kp} > \frac{q + \beta}{p} = \rho(F) + \frac{\beta}{p}.$$

令 $k \to +\infty$,与前设 $\rho(F)=q/p$ 矛盾;类似,可讨论 $F^p(y)-y<q$ 的情况. 故(2.5.9)成立. □

例 2.5.1　在 $\mathbf{R}$ 上定义关系“~”:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

易知“~”是等价关系,其商空间 $T^1=\mathbf{R}/\sim$是圆周. 定义

$$f: T^1 \to T^1: [x] \to [x + \theta],$$

其中 $\theta=\mathrm{const} \in \mathbf{R}$,称 f 为 T^1 上的旋转,θ 叫旋转角. 映射

$$E: x \mapsto [x], \quad \forall x \in \mathbf{R},$$
$$F: x \mapsto x + \theta, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

分别是覆盖映射和提升映射，显然$\deg(f)=1$，f是T^1上的保向自同胚，且$\rho(f)=\theta$. 于是，当θ为有理数时，具有周期点；当θ为无理数时，f的轨道在T^1中稠. □

定理 2.5.4 设$f: S^1 \to S^1$是保向同胚映射，若$\mathrm{Per}(f) \neq \varnothing$，则$\Omega(f)=\mathrm{Per}(f)$.

证明 由定理2.5.3知$NN(f)=\{p\}$，故$\mathrm{Per}(f)=\mathrm{Fix}(f^p)$是闭集. 对任意一点$\zeta \in S^1 \setminus \mathrm{Per}(f)$，取$\alpha, \beta \in \mathrm{Per}(f)$，使

$$\zeta \in (\alpha, \beta) \subset S^1 \setminus \mathrm{Per}(f). \tag{2.5.10}$$

对任一$k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$，记

$$k = mp + r, \quad r = 0, 1, \cdots, p-1,$$

由于f将圆弧映射成圆弧，由(2.5.10)有

$$f^k((\alpha, \beta)) \cap (\alpha, \beta) = \varnothing, \quad r = 1, \cdots, p-1.$$

于是，存在ζ的邻域$U_\zeta \subset (\alpha, \beta)$，使

$$f^k(U_\zeta) \cap U_\zeta = \varnothing, \quad r = 1, \cdots, p-1. \tag{2.5.11}$$

另一方面，由于f是保向映射，及$\zeta \overline{\in} \mathrm{Fix}(f^p)$，有

$$f^p(\zeta) > \zeta \text{ 或 } f^p(\zeta) < (\zeta), \quad \forall \zeta \in (\alpha, \beta),$$

其中"<"或">"是圆周定向诱导出的顺序关系，不妨设$f^p(\zeta) > \zeta$，于是

$$\cdots < f^{-2p}(\zeta) < f^{-p}(\zeta) < \zeta < f^p(\zeta) < f^{2p}(\zeta) \cdots$$

由f的连续性及(2.5.10)，有

$$\lim_{m \to +\infty} f^{-mp}(\zeta) = \alpha, \quad \lim_{m \to +\infty} f^{mp}(\zeta) = \beta,$$

从而，存在ζ的邻域U_ζ，使

$$f^k(U_\zeta) \cap U_\zeta = \varnothing, \quad r = 0.$$

联合(2.5.11)知$\zeta \overline{\in} \Omega(f)$，由(2.5.10)有

$$\Omega(f) \subset \mathrm{Per}(f).$$

另一方面，按定义有

$$\mathrm{Per}(f) \subset \Omega(f),$$

联合前式，得

$$\Omega(f) = \mathrm{Per}(f),$$

故结论成立. □

命题 2.5.4 设$f: S^1 \to S^1$保向同胚，若$\mathrm{Per}(f) = \varnothing$，非空闭集$M \subset S^1$是$f$的不变集，若弧$(\alpha, \beta)$是$M$的一个余区间，则

$$L_\omega(\zeta) \subset M, \ L_\alpha(\zeta) \subset M, \quad \forall \zeta \in (\alpha, \beta).$$

证明 由于 $f(M)=M$ 故

$$f^k(M)\subset M,\ f^k(S^1\setminus M)\subset S^1\setminus M,$$

从而 $f^k((\alpha,\beta))$仍是 M 的一个余区间,因此

$$f^k((\alpha,\beta))\cap f^j((\alpha,\beta))=\varnothing$$

或者

$$f^k((\alpha,\beta))=f^j((\alpha,\beta)).$$

但当 $k\neq j$ 时,上式不成立.否则 $f^{k-j}([\alpha,\beta])=[\alpha,\beta]$,与 $\mathrm{Per}(f)=\varnothing$矛盾.故$\{f^k(\alpha,\beta)\mid K\in\mathbf{Z}\}$两两不交,且

$$\lim_{k\to\infty}l(f^k([\alpha,\beta]))=0,$$

其中 $l(f^k([\alpha,\beta]))$表示弧 $f^k([\alpha,\beta])$的长度.否则与 S^1 的长度有限矛盾.因而

$$L_\omega(\zeta)=L_\omega(\alpha)=L_\omega(\beta)\subset M,\quad \forall\zeta\in(\alpha,\beta).$$

类似,可证 $L_\alpha(\zeta)\subset M,\ \forall\zeta\in(\alpha,\beta)$成立. □

定理 2.5.5 设 $f:S^1\to S^1$ 是保向同胚,若 $\mathrm{Per}(f)=\varnothing$则

(1)$\Omega(f)=L_\omega(\zeta)=L_\alpha(\zeta),\quad \forall\zeta\in S^1$.

(2)$\Omega(f)$是 f 的极小集.

(3)$\Omega(f)=S^1$ 或者是 S^1 上的一个无处稠密的完全集.

证明 证(1) 由定理 2.2.1 有 $L_\omega(\zeta)\subset\Omega(f),\ \forall\zeta\in S^1$,故只需证

$$L_\omega(\zeta)\supset\Omega(f),\quad \forall\zeta\in S^1$$

或

$$S^1\setminus L_\omega(\zeta)\subset S^1\setminus\Omega(f),\quad \forall\zeta\in S^1, \tag{2.5.12}$$

事实上,由命题 2.2.3 知 $L_\omega(\zeta)$是 f 的一个非空且闭的不变集.对任一 $\eta\in S^1\setminus L_\omega(\zeta)$,取 $L_\omega(\zeta)$的余区间(α,β)使 $\eta\in(\alpha,\beta)$.由命题 2.5.4 知

$$L_w(\eta)\subset L_\omega(\zeta),\quad L_\alpha(\eta)\subset L_\omega(\zeta),\quad \forall\eta\in S^1\setminus L_\omega(\zeta)$$

从而 η 是f 的游荡点,故

$$\eta\in S^1\setminus\Omega(f),\quad \forall\eta\in S^1\setminus L_\omega w(\zeta).$$

即(2.5.12)式成立,从而结论(1)成立.

证(2) 由定理2.2.1知$\Omega(f)$是f的一个非空且闭的不变集,设$H\subset\Omega(f)$是 f 的非空且闭的不变集,取 $\zeta\in H$,由结论(1)有

$$\Omega(f)=L_w(\zeta)\subset H,$$

即 $\Omega(f)=H$,故 $\Omega(f)$是 f 的极小集.

证(3) 显然,$\Omega(f)$的边界点集$\partial\Omega(f)$是闭集,且

$$\partial\Omega(f)\subset\Omega(f),\quad f(\partial\Omega(f))=\partial f(\Omega(f))=\partial\Omega(f).$$

由 $\Omega(f)$是极小集,故

$$\partial\Omega(f)=\varnothing \text{ 或 } \partial\Omega(f)=\Omega(f),$$

若$\partial\Omega(f)=\varnothing$,由 S^1 的连通性知 $\Omega(f)=S^1$;若$\partial\Omega(f)=\Omega(f)$,这时 $\Omega(f)$是无处稠集,而由结论(1)有

$$\forall\,\zeta\in\Omega(f)\Rightarrow\zeta\in L_w(\zeta)=\Omega(f),$$

即 $\Omega(f)$又是完全集. □

注 2.5.2 拓扑学[33]指出:任何紧致、完全、完全不连通的距离空间都同胚于康托尔(Cantor)三分集.故 $\Omega(f)\neq S^1$ 时,$\Omega(f)$同胚于康托尔三分集[34].

定理 2.5.5 提出一个问题,当 $\mathrm{Per}(f)=\varnothing$时,在什么条件下,有 $\Omega(f)=S^1$.对这个问题的回答是 Denjoy 理论[32].

定义 2.5.8 设 $f:S^1\to S^1$ 保向同胚且 $\mathrm{Per}(f)=\varnothing$,如果 $\Omega(f)=S^1$,则称 f 是遍历的(ergodic),否则称是非遍历的.

定理 2.5.6(Denjoy 定理) 设 $f:S^1\to S^1$ 保向同胚,$\rho(f)$是无理数,如果 f 具有不取 0 值的有界变差的微商,那么 f 是遍历的,即 $\Omega(f)=S^1$. □

对无周期点保向同胚映射的拓扑分类,有如下结论.

定理 2.5.7 如果无周期点的保向同胚 $f:S^1\to S^1$ 是遍历的,F 是 f 的任一提升,$\alpha=\rho(F)$则 f 拓扑共轭于旋转

$$\tau_\alpha:S^1\to S^1,\ \zeta\mapsto\zeta\exp(2\pi\alpha\mathrm{i}),\quad \forall\,\zeta\in S_1.$$ □

推论 2.5.1(Denjoy 定理) 设保向同胚 $f:S^1\to S^1$ 的旋转数 $\alpha=\rho(f)$是无理数,如果 f 具有不取 0 值的有界变差微商,则 f 拓扑共轭于旋转τ_α. □

以上定理的证明可参考有关文献.

§2.6 拓 扑 熵

在每一个紧致连续系统上可定义一个称之为拓扑熵[35,36]的非负拓扑共轭不变量,用以度量该系统在相空间上引起的运动的"混乱程度".拓扑熵的概念,最初由 R. L. Adler, A. G. Konhelm 和 M. H. McAndrow[37]引进,随后 R. Bowen[38]又在可度量化的拓扑空间上给出了不依赖于紧致性的拓扑熵定义.但是,在紧空间上可以证明拓扑熵的开覆盖定义和 Bowen 定义是等价的.

设(X,f)是一个紧致拓扑动力系统,开集簇 $\mathscr{A}$ 是紧空间 X 的一个开覆盖,记

$$f^{-1}(\mathscr{A})=\{f^{-1}(A)\mid A\in\mathscr{A}\}.$$

显然,也是 X 的一个开覆盖,X 上全体开覆盖组成的集合记为Γ,记

$$N(\mathscr{A})=\inf\ \mathrm{Card}\{\mathscr{A}'\mid\mathscr{A}'\text{ 是 }\mathscr{A}\text{ 的子覆盖}\},$$

其中 $\mathrm{Card}(S)$表示集合 S 的基数.由 X 的紧致性,知 $1\leqslant N(\mathscr{A})<+\infty$.

命题 2.6.1 $N(f^{-1}(\mathscr{A}))\leqslant N(\mathscr{A})$.

证明　由 X 的紧性,在 $\mathscr{A}$ 中存在 X 的有限子覆盖 $\{A_j \mid j=1,\cdots,n\}$. 另一方面,对任一 $x\in X$,存在 $l\in\mathbf{N}$, $1\leqslant l\leqslant n$,使 $f(x)\in A_l$ 或 $x\in f^{-1}(A_l)$,即 $\{f^{-1}(A_j)\mid j=1,\cdots,n\}$ 也是 $f^{-1}(\mathscr{A})$ 中 X 的一个子覆盖,于是

$$N(f^{-1}(\mathscr{A}))\leqslant N(\{f^{-1}(A_j)\mid j=1,\cdots,n\})\leqslant n,$$

由 $N(\mathscr{A})$ 的定义知命题结论成立. □

设 $\mathscr{B}$ 是 X 的另一开覆盖,记

$$\mathscr{A}\vee\mathscr{B}=\{A\cap B\mid A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B}\}.$$

命题 2.6.2　$N(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})\leqslant N(\mathscr{A})\cdot N(\mathscr{B})$.

证明　由 X 的紧性, $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 分别存在有限覆盖 $\{A_i\mid i=1,\cdots,n\}\subseteq\mathscr{A}$ 和 $\{B_j\mid j=1,\cdots,m\}\subseteq\mathscr{B}$. 于是 $\{A_i\cap B_j\mid i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,m\}$. 也是 X 的一个开覆盖. 类似于命题 2.6.1 的证明,可知结论成立. □

下面,记

$$\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-k}(\mathscr{A})=\mathscr{A}\vee f^{-1}(\mathscr{A})\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}(\mathscr{A}).$$

引理 2.6.1　设非负实数序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足条件 $a_{n+m}\leqslant a_n+a_m$, $\forall\, n, m\geqslant 1$,则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=\inf_n\frac{a_n}{n}.$$

证明　对固定的 $m\in\mathbf{N}$,设 $n=km+p$, $k\geqslant 0$, $0\leqslant p\leqslant(m-1)$. 由条件 $a_{n+m}\leqslant a_n+a_m$,易知 $a_{km}\leqslant ka_m$,于是

$$\frac{a_n}{n}=\frac{a_{km+p}}{km+p}\leqslant\frac{a_p}{km}+\frac{a_m}{m},$$

故

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\leqslant\frac{a_m}{m}.$$

另一方面,易知

$$\inf_m\frac{a_m}{m}\leqslant\liminf_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n},$$

联合前式知引理的结论成立. □

命题 2.6.3　记 $H(\mathscr{A})=\log N(\mathscr{A})$,则极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-k}(\mathscr{A})\right)$$

存在,且等于 $\inf\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-k}(\mathscr{A})\right)$.

证明　记

$$a_n=H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-k}(\mathscr{A})\right),$$

利用命题 2.6.1 和命题 2.6.2 有

$$a_{n+m}=H\left(\bigvee_{k=0}^{n+m-1}f^{-k}(\mathscr{A})\right)=H\left(\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-k}(\mathscr{A})\right)\vee\left(f^{-n}\bigvee_{k=0}^{m-1}f^{-k}(\mathscr{A})\right)\right)$$
$$\leqslant\log N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-k}(\mathscr{A})\right)+\log N\left(\bigvee_{k=0}^{m-1}f^{-k}(\mathscr{A})\right)=a_n+a_m,$$

按引理 2.6.1,由上式知结论成立. □

定义 2.6.1 称

$$\mathrm{ent}(f,\mathscr{A})=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-k}(\mathscr{A})\right)$$

为 f 相对于 $\mathscr{A}$ 的拓扑熵;称

$$\mathrm{ent}(f)=\sup_{\mathscr{A}\in\Gamma}\{\mathrm{ent}(f,\mathscr{A})\}$$

为 f 的拓扑熵(topological entropy).

由 $N(\mathscr{A})$ 和 $H(\mathscr{A})$ 的定义可知,$0\leqslant\mathrm{ent}(f,\mathscr{A}),\mathrm{ent}(f)\leqslant\infty$.

下面讨论拓扑熵的基本性质.

定理 2.6.1 $\mathrm{ent}(id)=0$.

证明留作习题. □

称开覆盖 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的加细,记作 $\mathscr{A}<\mathscr{B}$,如果对任意一个 $B\in\mathscr{B}$,存在 $A\in\mathscr{A}$ 使 $B\subset A$.容易证明

$$\mathscr{A}<\mathscr{B}\ \Rightarrow H(\mathscr{A})\leqslant H(\mathscr{B}),\tag{2.6.1}$$
$$\mathscr{A}<\mathscr{B}\ \Rightarrow\mathrm{ent}(f,\mathscr{A})\leqslant\mathrm{ent}(f,\mathscr{B}).\tag{2.6.2}$$

定理 2.6.2 $\mathrm{ent}(f^m)=m\cdot\mathrm{ent}(f),\ \forall\, m\in\mathbf{N}$.

证明 设 $m\in\mathbf{N},\mathscr{A}\in\Gamma$,则有 $\bigvee_{k=0}^{m-1}f^{-k}(\mathscr{A})\in\Gamma$.有

$$\mathrm{ent}(f,\mathscr{A})=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-k}(\mathscr{A})\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{nm}H\left(\bigvee_{k=0}^{mn-1}f^{-k}(\mathscr{A})\right)$$
$$=\frac{1}{m}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1}(f^m)^{-j}\left(\bigvee_{k=0}^{m-1}f^{-k}(\mathscr{A})\right)\right)=\frac{1}{m}\mathrm{ent}\left(f^m,\bigvee_{k=0}^{m-1}f^{-k}(\mathscr{A})\right)\tag{2.6.3}$$

成立,注意到 $\left\{\bigvee_{k=0}^{m-1}f^{-k}(\mathscr{A})\mid\mathscr{A}\in\Gamma\right\}\subset\Gamma$,于是

$$\mathrm{ent}(f)=\sup_{\mathscr{A}\in\Gamma}\{\mathrm{ent}(f,\mathscr{A})\}=\frac{1}{m}\sup_{\mathscr{A}\in\Gamma}\left\{\mathrm{ent}\left(f^m,\bigvee_{k=0}^{m-1}f^{-k}(\mathscr{A})\right)\right\}$$
$$\leqslant\frac{1}{m}\sup_{\mathscr{A}\in\Gamma}\{\mathrm{ent}(f^m,\mathscr{A})\}=\frac{1}{m}\mathrm{ent}(f^m),$$

即

$$m\cdot\mathrm{ent}(f)\leqslant\mathrm{ent}(f^m).\tag{2.6.4}$$

另一方面,记 $\mathscr{C}=\bigvee_{k=0}^{n-1}(f^m)^{-k}(\mathscr{A})=\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-mk}(\mathscr{A}),\mathscr{D}=\bigvee_{k=0}^{mn-1}f^{-k}(\mathscr{A})$,则 $\mathscr{C},\mathscr{D}\in\Gamma$,

容易证明 $\mathscr{C}<\mathscr{D}$，由(2.6.1)有 $H(\mathscr{C})\leqslant H(\mathscr{D})$，即

$$\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}(f^m)^{-k}(\mathscr{A})\right)\leqslant m\cdot\frac{1}{mn}H\left(\bigvee_{k=0}^{mn-1}f^{-k}(\mathscr{A})\right),$$

令 $n\to+\infty$，得

$$\mathrm{ent}(f^m,\mathscr{A})\leqslant m\cdot\mathrm{ent}(f,\mathscr{A}),$$

从而

$$\mathrm{ent}\ (f^m)\leqslant m\cdot\mathrm{ent}(f),$$

联合(2.6.4)有结论成立. □

定理 2.6.3　设(X,f)和(Y,g)是拓扑共轭的紧致系统，则

$$\mathrm{ent}(f)=\mathrm{ent}(g).$$

证明　设同胚 $h:X\to Y$ 使 $h\circ f=g\circ h$. 类似于命题 2.6.1 的证明，当 $\mathscr{A}$ 是Y的一个开覆盖时，有 $h^{-1}(\mathscr{A})$ 是 X 的一个开覆盖，且

$$N(h^{-1}(\mathscr{A})=N(\mathscr{A}).$$

将上式应用于 Y 的开覆盖 $\bigvee_{k=0}^{n-1}g^{-k}(\mathscr{A})$，并利用拓扑共轭 $h\circ f=g\circ h$，有

$$\mathrm{ent}(g,\mathscr{A})=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}g^{-k}(\mathscr{A})\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H\left(h^{-1}\bigvee_{k=0}^{n-1}g^{-k}(\mathscr{A})\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-k}\circ h^{-1}(\mathscr{A})\right)=\mathrm{ent}(f,h^{-1}(\mathscr{A})).$$

一般来讲，当 $\mathscr{A}$ 取遍 Y 的开覆盖时 $h^{-1}(\mathscr{A})$ 仅是 X 的一部分开覆盖，故

$$\mathrm{ent}(g)\leqslant\mathrm{ent}(f).$$

类似可证

$$\mathrm{ent}(f)\leqslant\mathrm{ent}(g).$$

故定理的结论成立. □

该定理说明拓扑熵是拓扑共轭的不变量.

定理 2.6.4　设闭子集 $E\subset X$，且 $f(E)\subset E$，则

$$\mathrm{ent}(f|_E)\leqslant\mathrm{ent}(f).$$

证明　记 E 的全体开覆盖 $\mathscr{A}$ 的集合为 $\Gamma_e=\{\mathscr{A}\}$，作

$$\mathscr{A}^*=\{A,X-E\,|\,A\in\mathscr{A}\},\quad\forall\mathscr{A}\in\Gamma_e.$$

显然，$\mathscr{A}^*$ 是 X 的开覆盖，也是 E 的开覆盖. 于是，$N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}(f|_E)^{-k}(\mathscr{A})\right)$ 不大于 $\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-k}(\mathscr{A}^*)$ 在 X 上的子覆盖的基数，故

$$H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}(f|_E)^{-k}(\mathscr{A})\right)\leqslant H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-k}(\mathscr{A}^*)\right),\quad\forall n\in\mathbf{N}.$$

因此

$$\mathrm{ent}(f|_E)=\sup_{\mathscr{A}\in\Gamma_e}\{\mathrm{ent}(f|_E,\mathscr{A})\}\leqslant\sup_{\mathscr{A}\in\Gamma_e}\{\mathrm{ent}(f,\mathscr{A}^*)\}\leqslant\mathrm{ent}(f).$$ □

由定理 2.2.1,紧致系统(X,f)的非游荡点集 $\Omega(f)$是闭集,且 $f(\Omega(f))\subset\Omega(f)$,故

$$\operatorname{ent}(f|_{\Omega(f)})\leqslant\operatorname{ent}(f). \tag{2.6.5}$$

事实上,其逆不等式也成立.这一结论,先由 Bowen 在紧致度量系统上给出[38],后来熊金城先生将其推广至一般的紧空间[39],下面的证明即源于此.

引理 2.6.2 设 $\mathscr{A}\in\Gamma$, $k\in\mathbf{N}$,记

$$k\mathscr{A}=\{A_1\cup\cdots\cup A_k\,|\,A_j\in\mathscr{A},j=1,2,\cdots,k\},$$

则 $k\mathscr{A}\in\Gamma$,且有如下结论成立.

(1) $N(\mathscr{A})\leqslant kN(k\mathscr{A})$.

(2) $f^{-1}(k\mathscr{A})=kf^{-1}(\mathscr{A})$.

(3) $k^n\bigvee\limits_{j=0}^{n-1}\mathscr{A}_j\prec\bigvee\limits_{j=0}^{n-1}k\mathscr{A}_j$, $\quad\mathscr{A}_j\in\Gamma,j=0,1,\cdots,n-1$.

(4) $\operatorname{ent}(f,k\mathscr{A})\geqslant\operatorname{ent}(f,\mathscr{A})-\log k$.

证明 显然 $k\mathscr{A}\in\Gamma$,且结论(1)和(2)成立.下证结论(3),记

$$\sigma=\{(i_0,i_1,\cdots i_{n-1})\,|\,i_j\in\{1,2,\cdots,k\},j=0,1,\cdots,n-1\}.$$

显然 $\operatorname{card}(\sigma)=k^n$,由

$$\bigcap_{j=0}^{n-1}\bigcup_{i=1}^{k}A_i^{(j)}=\bigcup_{(i_0,\cdots i_{n-1})\in\sigma}\bigcap_{j=0}^{n-1}A_{i_j}^{(j)},\quad A_{i_j}^{(j)}\in\mathscr{A}_i,j=0,\cdots,n-1,$$

不难核验结论(3)成立.利用结论(1),(2)和(3),以及(2.6.1)式,有

$$\begin{aligned}\operatorname{ent}(f,k\mathscr{A})&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}(k\mathscr{A})\Big)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1}kf^{-i}(\mathscr{A})\Big)\\&\geqslant\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H\Big(k^n\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}(\mathscr{A})\Big)\geqslant\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\Big(k^{-n}N\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1}f^{-i}(\mathscr{A})\Big)\Big)\\&=\operatorname{ent}(f,\mathscr{A})-\log k,\end{aligned}$$

即结论(4)成立. □

引理 2.6.3 设存在 $A\in\mathscr{A}\in\Gamma$ 使 $\Omega(f)\subset A$,则

$$\operatorname{ent}(f,\mathscr{A})=0.$$

证明 设条件成立.对 X 中的每一个游荡点 $x\in X\setminus\Omega(f)$,存在 $A_x\in\mathscr{A}$ 使 $x\in A_x$,且由(2.2.4),存在 x 的开邻域 $U_x\subset A_x$ 使

$$f^{-k}(U_x)\cap U_x=\varnothing,\quad\forall k\in\mathbf{N}, \tag{2.6.6}$$

作 $\mathscr{A}^*=\{A\}\cup\{U_x\,|\,x\in X\setminus\Omega(f)\}$,显然 $\mathscr{A}^*\in\Gamma$,且 $\mathscr{A}\prec\mathscr{A}^*$.任取 $\mathscr{A}^*$ 的子覆盖

$$\mathscr{B}=\{A,U_{x_1},U_{x_2},\cdots,U_{x_s}\},\quad s>1.$$

亦有 $\mathscr{A}\prec\mathscr{B}$,由(2.6.2)式有

$$0\leqslant\operatorname{ent}(f,\mathscr{A})\leqslant\operatorname{ent}(f,\mathscr{B}),$$

故只需证

$$\text{ent}\,(f,\mathscr{B}) = 0 \tag{2.6.7}$$

成立,则引理的结论成立.

取 $n\in\mathbf{N}$ 充分大,使 $n>s$. 由 $\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathscr{B})$ 导出的映射 $\zeta:\mathscr{B}^n\to\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathscr{B})$ 定义为

$$\zeta(C_0,C_1,\cdots,C_{n-1}) = \bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(C_k),\quad (C_0,\cdots,C_{n-1})\in\mathscr{B}^n.$$

若存在 $j<j'$ 使 $C_j=C_{j'}=U_{x_q}\in\mathscr{B}$ 对某个 $q(1\leqslant q\leqslant s)$ 成立,则

$$\zeta(C_0,\cdots C_{n-1}) = \varnothing.$$

若其不然,存在 $x\in X$ 使

$$x\in\bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(C_k)$$

或

$$x\in f^{-j}(U_{x_q})\cap f^{-j'}(U_{x_q}),$$

与(2.6.6)式矛盾. 因此,定义

$$\mathscr{D} = \{(C_0,\cdots C_{n-1})\,|\,C_j\in\mathscr{B}, j=0,\cdots n-1,$$
$$\text{若 } C_j\neq A, \text{则 } C_j\neq C_{j'}, \forall j'\neq j, j'=0,\cdots,n-1\},$$

于是

$$\zeta:\mathscr{D}\to\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathscr{B})\setminus\{\varnothing\}$$

是满射,应有

$$N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathscr{B})\right)\leqslant \text{card}(\mathscr{D}). \tag{2.6.8}$$

另一方面,在集 $\mathscr{D}$ 中,元素 $(C_0,\cdots C_{n-1})$ 中分量 $C_j\neq A$ 的个数 $\leqslant s$,因为 $\mathscr{B}$ 中不同于 A 的开集只有 s 个. 可以证明

$$\text{card}(\mathscr{D}) = \sum_{i=0}^{s}\binom{n}{i}\binom{s}{i} i! \leqslant n^s\cdot s^{s+1}. \tag{2.6.9}$$

于是由(2.6.8)和(2.6.9)式有

$$\text{ent}(f,\mathscr{B}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathscr{B})\right)\leqslant \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log(n^s\cdot s^{s+1}) = 0,$$

即(2.6.7)式成立. □

引理 2.6.4　若 $\mathscr{A}\in\Gamma$, $Y\subset X$, 记

$$\mathscr{A}|Y = \{A\cap Y\,|\,A\in\mathscr{A}\},$$

则如下结论成立.

(1) 设闭集 $Y_1\subset Y\subset X$, 则 $H(\mathscr{A}|Y_1)\leqslant H(\mathscr{A}|Y)$.

(2) 设 $\mathscr{A}_j\in\Gamma$, $j=0,1,\cdots,n-1$. 则 $\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}\mathscr{A}_k\right)|Y = \bigvee_{k=0}^{n-1}(\mathscr{A}_k|Y)$.

(3)设 $f(Y)\subset Y$,则 $H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathscr{A})\mid Y\right)\leqslant H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}(f|_Y)^{-k}(\mathscr{A}|Y)\right)$.

证明 证(1).设 $A_j\cap Y\in\mathscr{A}|Y, j=1,2,\cdots,k$,使

$$Y_1\subset Y\subset\bigcup_{j=1}^{k}(A_j\cap Y),$$

于是,有

$$Y_1\subset\bigcup_{j=1}^{k}(A_j\cap Y_1).$$

若$\{A_j\cap Y|j=1,\cdots,k\}$是 $\mathscr{A}|Y$ 在 Y 上的最小子覆盖,注意到$\{A_j\cap Y_1|j=1,\cdots,k\}$是 $\mathscr{A}|Y_1$ 在 Y_1 的一个子覆盖,应有

$$\begin{aligned}N(\mathscr{A}|Y) &= \mathrm{Card}\{A_j\cap Y|j=1,\cdots,k\}\\ &= \mathrm{Card}\{A_j\cap Y_1|j=1,\cdots,k\}\geqslant N(\mathscr{A}|Y_1),\end{aligned}$$

即结论(1)成立.

结论(2)是显然的,下证结论(3).由 $f(Y)\subset Y$,有 $Y\subset\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(Y)$.又由

$$\bigvee_{k=0}^{n-1}(f|_Y)^{-k}(\mathscr{A}|Y)=\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-k}(\mathscr{A})\right)\Big|\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-k}(Y)\right),$$

利用结论(1)和(2),故

$$\begin{aligned}H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}(f^{-k}(\mathscr{A})\mid Y)\right) &= H\left(\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-k}(\mathscr{A})\right)\Big| Y\right)\\ &\leqslant H\left(\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-k}(\mathscr{A})\right)\Big|\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}f^{-k}(Y)\right)\right)\\ &= H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1}(f|_Y)^{-k}(\mathscr{A}|Y)\right),\end{aligned}$$

即结论(3)成立. □

定理 2.6.5 设 X 是紧致拓扑空间,则

$$\mathrm{ent}(f)=\mathrm{ent}(f|_{\Omega(f)}).$$

证明 设 X 是紧空间,按定理2.2.1非游荡点集 $\Omega(f)$ 是闭集,且 $f(\Omega(f))\subset\Omega(f)$.再按(2.6.5)式只需证

$$\mathrm{ent}(f)\leqslant\mathrm{ent}(f|_{\Omega(f)}) \tag{2.6.10}$$

成立,即可.设 $\mathscr{A}\in\Gamma$ 且$\{A_j\cap\Omega(f)|A_j\in\mathscr{A}, j=1,\cdots,k\}$是 $\mathscr{A}|\Omega(f)$在 $\Omega(f)$ 上的最小子覆盖,即

$$N(\mathscr{A}|\Omega(f))=k,$$

且

$$\Omega(f)\subset\bigcup_{j=1}^{k}(A_j\cap\Omega(f))\subset\bigcup_{j=1}^{k}A_j.$$

于是,$\mathscr{A}^*=\{A_1\cup\cdots\cup A_k\}\cup\{\mathscr{A}\}$是 $k\mathscr{A}$ 在 X 上的一个子覆盖,据引理 2.6.2 的结论(4)和引理 2.6.3,有

$$0 = \operatorname{ent}(f, k\mathscr{A}) \geqslant \operatorname{ent}(f, \mathscr{A}) - \log k$$

或

$$\operatorname{ent}(f, \mathscr{A}) \leqslant \log k = H(\mathscr{A} | \Omega(f)).$$

据此,由(2.6.3)式,并利用引理 2.6.4,注意到 $\Omega(f^m) \subset \Omega(f)$, $\forall m \in \mathbf{N}$,不难完成如下推导

$$\begin{aligned}
\operatorname{ent}(f, \mathscr{A}) &= \frac{1}{m}\operatorname{ent}\left(f^m, \bigvee_{k=0}^{m-1} f^{-k}(\mathscr{A})\right) \leqslant \frac{1}{m} H\left(\left(\bigvee_{k=0}^{m-1} f^{-k}(\mathscr{A})\right) \Big| \Omega(f^m)\right) \\
&\leqslant \frac{1}{m} H\left(\left(\bigvee_{k=0}^{m-1} f^{-k}(\mathscr{A})\right) \Big| \Omega(f)\right) \leqslant \frac{1}{m} H\left(\bigvee_{k=0}^{m-1} (f^{-k}(\mathscr{A}) | \Omega(f))\right) \\
&\leqslant \frac{1}{m} H\left(\bigvee_{k=0}^{m-1} (f|_{\Omega(f)})^{-k}(\mathscr{A} | \Omega(f))\right) \\
&\to \operatorname{ent}(f|_{\Omega(f)}, \mathscr{A} | \Omega(f)) \quad (m \to +\infty),
\end{aligned}$$

由于 $\mathscr{A} \in \Gamma$ 的任意性,有(2.6.10)成立. □

例 2.6.1　设(I, f)是自同胚系统,则 $\operatorname{ent}(f) = 0$.

证明　设 $f: I \to I$ 是同胚映射,则 f^2 是严格单调递增函数,且易证 $\Omega(f^2) = \operatorname{Fix}(f^2)$,于是 f^2 在 $F(f^2) = \operatorname{Fix}(f^2)$ 上是恒同映射,故

$$\operatorname{ent}(f) = \frac{1}{2}\operatorname{ent}(f^2) = \frac{1}{2}\operatorname{ent}(f^2 | \Omega(f^2)) = \frac{1}{2}\operatorname{ent}(f^2|_{F(f^2)}) = 0. \quad \square$$

拓扑熵的定义仅要求 X 的紧致性,无需要求 X 是可度量化的. Bowen 的拓扑熵定义适用于(X, f)是可度量化的一致连续系统. 应当注意到,拓扑空间 X 可度量化的充分必要条件是 X 为 T_3 空间且具有至多可数个局部有限开集族所成的基(即 σ 局部有限基),而不必要求紧致性. 为叙述的方便,下面仅在紧致度量空间上给出 Bowen 拓扑熵定义.

设(X, f)为紧致度量系统,d 是 X 上给出的一个度量.

定义 2.6.2　设 $n \in \mathbf{N}$ 和 $\varepsilon > 0$,称子集合 $F \subset X$ 为 f 的一个(n, ε)张成集,如果对任给的一个 $x \in X$,存在 $y \in F$,使

$$d(f^k(x), f^k(y)) \leqslant \varepsilon, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

记 f 的所有(n, ε)张成集的基数的下确界为 $r_n(\varepsilon)$;称子集合 $E \subset X$ 为 f 的一个(n, ε)分离集,如果对 $x, y \in E$, $x \neq y$,则存在 $0 \leqslant k < n$ 使

$$d(f^k(x), f^k(y)) > \varepsilon,$$

记 f 的所有(n, ε)分离集的基数的上确界为 $S_n(\varepsilon)$.

由 X 的紧致性,知

$$1 \leqslant r_n(\varepsilon) < +\infty, \qquad 1 \leqslant S_n(\varepsilon) < +\infty.$$

下面,记

$$r(\varepsilon) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon),$$

$$S(\varepsilon)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log S_n(\varepsilon).$$

命题 2.6.4 在如上记号下，有如下结论成立：

(1)若 $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$，则 $r(\varepsilon_1)\geqslant r(\varepsilon_2)$，$S(\varepsilon_1)\geqslant S(\varepsilon_2)$.

(2)$r(\varepsilon)\leqslant S(\varepsilon)\leqslant r(\varepsilon/2)$.

(3)$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}r(\varepsilon)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}S(\varepsilon)$.

证明 由定义2.6.2，当$0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$时，有$r_n(\varepsilon_1)\geqslant r_n(\varepsilon_2)$和$S_n(\varepsilon_1)\geqslant S_n(\varepsilon_2)$，由此可知结论(1)成立.

下证结论(2). 首先，设 E 是具有最大基数的(n,ε)分离集，对任一 $x\in X$，若 $x\in X\setminus E$，则任取 $y\in E$ 有

$$d(f^k(x),f^k(y))\leqslant\varepsilon,\quad k=0,1,\cdots,n-1,$$

若 $x\in E$，取上式中的 $y=x$ 自然有上式成立，即 E 也是(n,ε)张成集，故

$$r_n(\varepsilon)\leqslant S_n(\varepsilon)\tag{2.6.11}$$

成立，从而可证结论(2)第一个不等式成立.

其次，设 E 和 F 分别是 f 的(n,ε)分离集和$(n,\varepsilon/2)$张成集. 任取 $x\in E\subset X$，则存在 $y\in F$ 使

$$d(f^k(x),f^k(y))\leqslant\varepsilon/2,\quad k=0,1,\cdots,n-1,$$

由此建立了一个映E到F中的映射；若$x_1,x_2\in E$，且$x_1\neq x_2$，则存在y_1，$y_2\in F$ 满足上式. 若 $y_1=y_2$，则

$$\begin{aligned}d(f^k(x_1),f^k(x_2))&\leqslant d(f^k(x_1),f^k(y_1))+d(f^k(x_2),f^k(y_2))\\&\leqslant\varepsilon,\qquad k=0,1,\cdots,n-1,\end{aligned}$$

与 E 是(n,ε)分离集矛盾，故$y_1\neq y_2$，即该映射是内射. 从而$\mathrm{Card}(E)\leqslant\mathrm{Card}(F)$，

$$S_n(\varepsilon)\leqslant r_n(\varepsilon/2),\tag{2.6.12}$$

于是结论(2)的第二个不等式成立.

由结论(2)知结论(3)成立. □

定义 2.6.3 称

$$\text{B-ent}(f)=\lim_{\varepsilon\to 0}r(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}S(\varepsilon)$$

为 f 在 Bowen 意义下的拓扑熵

下面，将证明在紧致可度量化系统(X,f)上，ent(f)与 B-ent(f)相等，从而 B-ent(f)的定义与拓扑度量 d 的选取无关.

设 $\mathscr{A}$ 是紧度量空间 X 的一个开覆盖，集 $E\subset X$ 的直径记为

$$d(E)=\sup\{d(x,y)\mid x,y\in E\},$$

称实数 $\delta>0$ 为 $\mathscr{A}$ 的 Lebesgue 数，若

$$d(E) < \delta \Rightarrow \exists A \in \mathscr{A} \text{ 使 } E \subset A, \quad \forall E \subset X$$

成立. 紧度量空间 X 的每一个开覆盖 $\mathscr{A}$ 都有正的 Lebesgue 数[40].

引理 2.6.5　设 $\mathscr{A}$ 是紧度量空间 X 上的一个开覆盖, 则

$$N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-1}(\mathscr{A})\right) \leqslant r_n\left(\frac{\delta}{2}\right), \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

证明　设 $n \in \mathbf{N}$, 取 f 的 $(n, \delta/2)$ 张成集 F, 使

$$\operatorname{Card}(F) = r_n(\delta/2), \tag{2.6.13}$$

故对任一 $x \in X$, 存在 $y \in F$ 使

$$f^k(x) \in \bar{B}(f^k(y), \delta/2), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

或

$$x \in f^{-k}(\bar{B}(f^k(y), \delta/2)), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

其中 $B(f^k(y), \delta/2)$ 表示 X 中以 $f^k(y)$ 为心而以 $\delta/2$ 为半径的开球. 因此

$$X \subset \bigcup_{y \in F} \bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\bar{B}(f^k(y), \delta/2)).$$

由于 $d(\bar{B}(f^k(y), \delta/2)) < \delta$, 故存在 $A \in \mathscr{A}$ 使

$$\bar{B}(f^k(y), \delta/2) \subseteq A$$

或

$$f^{-k}(\bar{B}(f^k(y), \delta/2)) \subseteq f^{-k}(A),$$

故 $\bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\bar{B}(f^k(y), \delta/2))$ 是 $\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathscr{A})$ 的一个元素的子集, 记这个元素为 $G(y)$. 于是 $\{G(y) \mid y \in F\}$ 是 $\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathscr{A})$ 中 X 上的一个子覆盖. 据定义, 并利用(2.6.13)有

$$N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathscr{A})\right) \leqslant \operatorname{Card}(\{G(y) \mid y \in F\}) \leqslant \operatorname{Card}(F) = r_n(\delta/2)$$

由 $n \in \mathbf{N}$ 的任意性, 知引理结论成立.　□

引理 2.6.6　设 $\mathscr{A}$ 是紧度量空间 X 上的一个开覆盖, 若开覆盖 $\mathscr{A}$ 的直径 $\operatorname{diam}(\mathscr{A})$ 满足条件

$$\operatorname{diam}(\mathscr{A}) = \sup\{d(A) \mid A \in \mathscr{A}\} \leqslant \varepsilon,$$

则

$$S_n(\varepsilon) \leqslant N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathscr{A})\right), \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

证明　设 $n \in \mathbf{N}$, 取 f 的 (n, ε) 分离集 E 使

$$\operatorname{Card}(E) = S_n(\varepsilon). \tag{2.6.14}$$

又设 I 是一有限指标集, $\{G_j \mid j \in I\}$ 是开覆盖 $\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathscr{A})$ 在 X 上的一个子覆盖. 对任一 $x \in E$, 存在 $j \in I$ 使 $x \in G_j \in \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathscr{A})$, 不妨记

$$G_j = A_0 \cap f^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap f^{-(n-1)}(A_{n-1}), \quad A_k \in \mathscr{A}, k = 0, \cdots, n-1.$$

若存在 $y \in E, y \neq x$ 有 $y \in G_j$,应有 $\{x, y\} \subset f^{-k}(A_k)$ 或

$$\{f^k(x), f^k(y)\} \subset A_k, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

故

$$d(f^k(x), f^k(y)) \leqslant d(A_k) \leqslant \mathrm{diam}(\mathscr{A}) \leqslant \varepsilon, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

这与 E 是(n, ε)分离集矛盾,故对任一 $y \in E$,若 $y \neq x$,则 $y \bar{\in} G_j$,从而

$$\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(\{G_j \mid j \in I\}).$$

据定义,并利用(2.6.14)有

$$S_n(\varepsilon) = \mathrm{Card}(E) \leqslant N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathscr{A})\right).$$

由 $n \in \mathbf{N}$ 的任意性知引理的结论成立. □

定理 2.6.6 设(X, f)是紧致度量系统,则

$$\mathrm{ent}(f) = \text{B-ent}(f).$$

证明 设 $\varepsilon > 0$,取 X 的开覆盖 $\mathscr{A}_\varepsilon$ 和 $\mathscr{B}_\varepsilon$ 分别为

$$\mathscr{A}_\varepsilon = \{B(x, 2\varepsilon) \mid x \in X\} \text{ 和 } \mathscr{B}_\varepsilon = \{B(x, \varepsilon/2) \mid x \in X\}.$$

令 $\delta = 2\varepsilon$,则 δ 是 $\mathscr{A}_\varepsilon$ 的 Lebesgue 数,且 $\mathrm{diam}(\mathscr{B}_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. 由引理 2.6.5,引理 2.6.6 和式(2.6.11)有

$$N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathscr{A}_\varepsilon)\right) \leqslant r_n(\varepsilon) \leqslant S_n(\varepsilon) \leqslant N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathscr{B}_\varepsilon)\right), \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

由此可证定理成立. □

第三章 符号动力系统

字符串是信息科学研究的对象[41]，其动力系统[42~45]是符号空间上转移自映射生成的迭代系统，并作为原型根植于理论计算机科学、混沌物理学、微分动力系统、编码与密码学等．本章重点讨论其拓扑熵和混沌性质，同时给出一个经典的实例——Smale 马蹄，其中主要取材于参考文献[46]．

§3.1 符号空间

设 $N\geqslant 2$，S 是 N 个符号的集合，例如

$$S(N)=\{0,1,\cdots,N-1\},$$

赋以离散拓扑而成为紧致的拓扑空间，称为状态空间．

定义 3.1.1 称拓扑积

$$\Sigma(N)=\prod_{k=-\infty}^{+\infty}S_k,\quad S_k=S(N)$$

为双边符号空间；称

$$\Sigma_+(N)=\prod_{k=0}^{+\infty}S_k,\quad S_k=S(N)$$

为单边符号空间，其元素，分别为双边符号序列

$$\cdots,x_{-2},x_{-1};x_0,x_1,x_2,\cdots$$

或单边符号序列

$$x_0,x_1,x_2,\cdots$$

其中双边符号序列中“;”号右边的一位，是零起始位．

在不引起混淆时，有时也记 $\Sigma_+(N)$ 为 $\Sigma(N)$．

定义 3.1.2 设 $m\geqslant 0, h\in\mathbf{Z}, A=(a_{-m}\cdots a_{-1};a_0\cdots a_m)$，记

$$U_h[A]=\{x\in\Sigma(N)\mid x_{h+k}=a_k,|k|\leqslant m\},\tag{3.1.1}$$

称为双边序列空间的柱集(类似可定义单边序列空间的柱集)．

取 $h=0$，m 和 $a_k(|k|\leqslant m)$ 分别取遍 $\mathbf{N}$ 和 $S(N)$ 中的元素，所得柱集的全体形成 $\Sigma(N)$ 的一个可数拓扑基．$\Sigma(N)$ 中的每一个开集均可表示为若干柱集的并，柱集是开集，也是闭集．

对 $\Sigma(N)$ 中的元素

$$x=(\cdots,x_{-2},x_{-1};x_0,x_1,x_2,\cdots),$$

$$y=(\cdots,y_{-2},y_{-1};y_0,y_1,y_2,\cdots),$$

定义

$$d(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{d(x_n,y_n)}{2^{|n|}},\tag{3.1.2}$$

其中

$$d(x_n,y_n)=\begin{cases}1, & \text{如果 } x_n\neq y_n,\\ 0, & \text{如果 } x_n=y_n.\end{cases}$$

易核验，$d(x,y)$是 $\Sigma(N)$中元素 x 和 y 之间的距离；类似，在单边序列空间中也可引入距离. 于是有

命题 3.1.1 序列空间 $\Sigma(N)$赋以度量 $d(x,y)$而成为度量空间.

命题 3.1.2 符号空间 $\Sigma(N)$是紧致、完全且完全不连通的度量空间，从而同胚于康托尔三分集.

证明 首先，由Tychonov定理，紧致拓扑空间的积空间是紧致的，知 $\Sigma(N)$是紧空间.

其次，对任一 $x\in\Sigma(N)$,

$$x=(\cdots,x_{-2},x_{-1};x_0,x_1,x_2,\cdots),$$

取

$$x^{(n)}=(\cdots,x_{-2},x_{-1};x_0,x_1,\cdots,x_n^*,\cdots),$$

其中

$$x_n^*=\begin{cases}1, & \text{若 } x_n=0,\\ 0, & \text{若 } x_n\neq 0.\end{cases}$$

显然

$$x^{(n)}\in\Sigma(N)\setminus\{x\},$$

且

$$\lim_{n\to+\infty}x^{(n)}=x,$$

即 $\Sigma(N)$ 是完全的.

最后，设 D 是$\Sigma(N)$ 中任意一个含有两个不同点 x 和 y 的子集，

$$x=(\cdots,x_{-2},x_{-1};x_0,x_1,x_2,\cdots),$$

$$y=(\cdots,y_{-2},y_{-1};y_0,y_1,y_2,\cdots),$$

其中 $x_k\neq y_k$. 取 $\Sigma(N)$ 中的开集

$$U=\{u\in\Sigma(N)\mid u_k=x_k\},$$

$$V=\{v\in\Sigma(N)\mid v_k\neq x_k\},$$

有

$$U\cup V=\Sigma(N),\quad U\cap V=\varnothing,$$

且

$$x \in U \cap D, \quad y \in V \cap D,$$

因而,D 是不连通的.从而,$\Sigma(N)$ 的任何非空连通集只含有一点,即 $\Sigma(N)$ 是完全不连通的.

由文献[33]知,任何紧致、完全、完全不连通的距离空间都同胚于康托尔三分集;从而 $\Sigma(N)$ 同胚于康托尔三分集. □

康托尔三分集,见例 4.1.1.

下面,介绍符号空间 $\Sigma(N)$ 上的一个称之为转移映射的特殊映射.

定义 3.1.3　设 $\Sigma(N)$ 为双边序列空间,称左移映射 $\sigma:\Sigma(N)\to\Sigma(N)$:

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= \sigma(\cdots, x_{-2}, x_{-1}, ; x_0, x_1, x_2, \cdots)\\ &= (\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_0 ; x_1, x_2, \cdots).\end{aligned}$$

或者,当 $\Sigma(N)$ 为单边符号空间时

$$\sigma(x) = \sigma(x_0, x_1, x_2, \cdots) = (x_1, x_2, \cdots), \qquad \forall x \in \Sigma(N)$$

为 $\Sigma(N)$ 上的转移自映射.

设 Λ 是$\Sigma(N)$ 中的闭子集,且 $\sigma(\Lambda) \subset \Lambda$,称

$$\sigma_\Lambda = \sigma|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$$

为 σ 的子转移.

不难验证如下命题.

命题 3.1.3　$\sigma:\Sigma(N)\to\Sigma(N)$ 是连续满射;特别当 $\Sigma(N)$ 是双边符号空间时,$\sigma:\Sigma(N)\to\Sigma(N)$ 是同胚映射.

定义 3.1.4　称动力系统$(\Sigma(N),\sigma)$ 为符号动力系统.

下面引进关于有限子转移的概念.

设$(\Sigma(N),\sigma)$是单边符号动力系统,记

$$M(\Sigma) = \{\Lambda \in 2^{\Sigma(N)} \mid \Lambda \text{ 闭且} \sigma(\Lambda) \subseteq \Lambda\}. \tag{3.1.3}$$

设 $A=(a_0\cdots a_{n-1})$是$S(N)$上一个长度为$n\geqslant 1$的有限序列,如果对$x\in\Sigma(N)$,存在 $m\geqslant 0$ 使

$$x_{m+k} = a_k, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

则称有限序列 A 在x 中出现,记为 $A \prec x$,否则,记为 $A \not\prec x$.

如果存在 $x \in \Lambda$ 使$A \prec x$,则称 A 出现在Λ 中,记为 $A \prec \Lambda$;如果在 $S(N)$ 上的有限序列 $B = (b_0, \cdots, b_{m-1})$ 中,有 $n \leqslant m$ 且存在$0 \leqslant l \leqslant m - n$ 使$b_{l+j} = a_j (j = 0, \cdots, n-1)$,则称 A 出现在B 内,记为 $A \prec B$.

设 $\mathscr{A}$是 $S(N)$上有限序列的集合,记

$$\Lambda_{\mathscr{A}} = \{x \in \Sigma(N) \mid A \not\prec x, \quad \forall A \in \mathscr{A}\}, \tag{3.1.4}$$

显然 $\sigma(\Lambda_{\mathscr{A}})\subseteq\Lambda_{\mathscr{A}}$且

$$\Sigma(N) - \Lambda_{\mathscr{A}} = \{x \in \Sigma(N) \mid A \prec x, \exists A \in \mathscr{A}\}$$

是柱集的并，即是开集,因而 $\Lambda_{\mathscr{A}}$ 是闭集.从而

$$\Lambda_{\mathscr{A}} \in M(\Sigma). \tag{3.1.5}$$

定义 3.1.5 称 $S(N)$上任意一个有限序列的集合 $\mathscr{A}$ 所决定的子系统

$$\sigma_{\Lambda_{\mathscr{A}}} = \sigma|_{\Lambda_{\mathscr{A}}}: \Lambda_{\mathscr{A}} \to \Lambda_{\mathscr{A}},$$

为 $\mathscr{A}$ 决定的子转移,又称 $\mathscr{A}$ 是子系统$(\Lambda_{\mathscr{A}}, \sigma_{\Lambda_{\mathscr{A}}})$的排除系统.

一个有限序列的集合 $\mathscr{A}$ 作为一个排除系统可以决定一个子系统$(\Lambda_{\mathscr{A}}, \sigma_{\Lambda_{\mathscr{A}}})$;反之,对任一 $\Lambda \in M(\Sigma)$也存在相应的排除系统 $\mathscr{A}$.

命题 3.1.4 设 $\Lambda \in M(\Sigma)$,则存在 $S(N)$上有限序列的集合 $\mathscr{A}$,使 $\Lambda = \Lambda_{\mathscr{A}}$.

证明 令

$$\mathscr{A} = \{A = (a_0 \cdots a_k) \mid a_j \in S(N), 0 \leqslant j \leqslant k, \forall k \geqslant 0, A \not\prec \Lambda\}, \tag{3.1.6}$$

由(3.1.4)知

$$\Lambda \subseteq \Lambda_{\mathscr{A}}. \tag{3.1.7}$$

下证 $\Lambda_{\mathscr{A}} \subseteq \Lambda$.否则,$\Lambda_{\mathscr{A}} - \Lambda$ 是$\Lambda_{\mathscr{A}}$的非空开集,故存在 $\Sigma(N)$的开集 u 使

$$u \cap \Lambda_{\mathscr{A}} = \Lambda_{\mathscr{A}} - \Lambda.$$

于是,存在有限长序列 B 使 $U_0[B] \subset u$,使

$$\varnothing \neq U_0[B] \cap \Lambda_{\mathscr{A}} \subset \Lambda_{\mathscr{A}} - \Lambda. \tag{3.1.8}$$

如果 $B \overline{\in} \mathscr{A}$,则存在 $x \in \Lambda$ 使$B \prec x$,即存在 $m \geqslant 0$ 使

$$x \in U_m[B] \cap \Lambda,$$

或者由(3.1.7)又有

$$\sigma^m(x) \in U_0[B] \cap \Lambda \subset U_0[B] \cap \Lambda_{\mathscr{A}}$$

与(3.1.8)矛盾;如果 $B \in \mathscr{A}$,由(3.1.8)必存在 $x \in U_0[B] \cap \Lambda_{\mathscr{A}}$,这与 $\Lambda_{\mathscr{A}}$ 的定义矛盾.从而

$$\Lambda_{\mathscr{A}} \subseteq \Lambda,$$

联合(3.1.7)有结论成立. □

注 3.1.1 设 $\mathscr{A}$ 是 $S(N)$上有限序列的集合,对每一个 $n > 0$,记 $\mathscr{A}$ 中长度不大于 n 的有限序列的集合为 $\mathscr{A}_n$,则

$$\mathscr{A}_n \subset \mathscr{A}_{n+1} \subset \mathscr{A}, \quad \mathscr{A} = \bigcup_{n>0} \mathscr{A}_n. \tag{3.1.9}$$

于是

$$\Lambda_{\mathscr{A}} = \bigcap_{n>0} \Lambda_{\mathscr{A}_n}. \tag{3.1.10}$$

称 $\mathscr{A}_n$ 为有限排除系统.于是,每个子转移 σ_Λ,由可列个有限排除系统决定.

定义 3.1.6 称 $\Lambda \in M(\Sigma)$ 或

$$\sigma_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$$

是有限型的,如果 Λ 有一个有限的排除系统;其中有限序列的最大长度称为该系统的阶数,Λ 的所有排除系统阶数的下确界,称为 Λ 或子转移 σ_Λ 的阶数.

记

$$\mathscr{B} = \{B = (b_0 \cdots b_{J-1}) \mid b_j \in S(N), j = 0, \cdots, J-1\}. \quad (3.1.11)$$

定义 3.1.7 设 $\mathscr{B}'$ 是 J 阶有限型 Λ 的长度均为 J 的排除系统,则称 $\mathscr{B} - \mathscr{B}'$ 为 Λ 的决定系统.

由定义可知

$$\Lambda = \{x \in \Sigma(N) \mid \forall n \geqslant 0, (x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+J-1}) \in \mathscr{B} - \mathscr{B}'\}. \quad (3.1.12)$$

定理 3.1.1 任何有限型子转移都拓扑共轭于一个二阶子转移.

证明 设

$$\sigma : \Lambda \to \Lambda, \quad \Lambda \in M(\Sigma)$$

是阶数 $J \geqslant 2$ 的有限型子转移.令

$$Q = \{B \mid B \in \mathscr{B}, \exists x \in \Lambda \text{ 使 } B \prec x\},$$

考虑 Q 上单边符号空间 Σ_Q 上的转移自映射

$$\sigma' : \Sigma_Q \to \Sigma_Q.$$

记

$$\mathscr{D} = \{(BB') \mid B, B' \in Q, \exists 1 \leqslant j \leqslant J-1 \text{ 使 } b_j \neq b'_{j-1}\},$$

其中 $B = (b_0 \cdots b_{J-1})$,$B' = (b'_0 \cdots b'_{J-1})$.并记 Q 上的二阶排除系统 $\mathscr{D}$ 决定的子转移为 $\Lambda_{\mathscr{D}} \in M(\Sigma_Q)$.定义 $\pi : \Lambda \to \Sigma_Q$ 为

$$x \mapsto (B_0, B_1, \cdots), \quad \forall x = (x_0 x_1 \cdots) \in \Lambda,$$

其中 $B_k = (x_k x_{k+1} \cdots x_{k+J-1})$,$\forall k \geqslant 0$.则 $\pi : \Lambda \to \Lambda_{\mathscr{B}}$ 是拓扑共轭映射.事实上,首先由如上定义有

$$(BB') \not\prec \pi(\Lambda), \quad \forall (BB') \in \mathscr{B},$$

即

$$\pi(\Lambda) \subseteq \Lambda_{\mathscr{D}}.$$

反之,任一 $g = B_0 B_1 \cdots \in \Lambda_{\mathscr{D}}$,则存在 $x \in \Lambda$ 使 $B_k \prec x$,且 $\mathscr{D} \not\prec x$ 知 $\pi(x) = g$,从而 $\pi(\Lambda) = \Lambda_{\mathscr{D}}$;即 π 是满射.易知,π 是内射,故 π 是双射.

其次,Σ_Q 中任意一个柱集 $U[B_0 \cdots B_k]$ 的原像 $U[x_1 \cdots x_{k+J-1}]$ 是 $\Sigma(N)$ 中的柱集,故 π 是连续的.同样,可证 π^{-1} 的连续性,因而 π 是同胚.

最后,在 Λ 上不难验证

$$\sigma' \circ \pi = \pi \circ \sigma.$$

故有限型子转移(Λ,σ)拓扑共轭于二阶有限型子转移$(\Lambda_{\mathscr{D}},\sigma')$. □

定理 3.1.2 设 $\Lambda \in M(\Sigma)$,则下述条件等价

(1)Λ 是有限型的,阶数为 $J > 0$.

(2)存在阶数为 J 的决定系统 $\mathscr{B}_J$.

(3)设 $x, y \in \Lambda$,存在 $n \geqslant 0$ 有

$$x_j = y_j, \quad j = n, n+1, \cdots, n+J-2,$$

定义 $z \in \Sigma(N)$使

$$z_j = \begin{cases} x_j, & j \leqslant n+J-2, \\ y_j, & j \geqslant n. \end{cases}$$

则 $z \in \Lambda$.

(4)对任意 $n \geqslant J+1$ 和 $S(N)$上的有限序列$(a_0,\cdots,a_n)$,如果

$$u = U_0[a_0,\cdots,a_{n-1}] \cap \Lambda \neq \varnothing,$$

$$v = U_{n-J+1}[a_{n-J+1},\cdots,a_n] \cap \Lambda \neq \varnothing,$$

则

$$u \cap v \neq \varnothing,$$

其中

$$U_m[a_0,\cdots,a_{n-1}] = \{x \in \Sigma(N) \mid x_{m+j} = a_j, j = 0,\cdots,n-1\}.$$

证明 证(1)⇒(2) 设$\Lambda \in M(\Sigma)$是阶数$J>0$的有限型,由命题 3.1.4 存在排除系统 $\mathscr{A}$ 使 $\Lambda = \Lambda_{\mathscr{A}}$. 记

$$\mathscr{B}' = \{B \in \mathscr{B} \mid \exists A \in \mathscr{A} \text{使 } A \prec B\},$$

其中 $\mathscr{B}$ 如(3.1.11)定义. 显然

$$\Lambda = \Lambda_{\mathscr{A}} = \Lambda_{\mathscr{B}'},$$

即 $\mathscr{B}'$ 是Λ 长度均为J 的排除系统,按定义 3.1.7, $\mathscr{B}_J = \mathscr{B} - \mathscr{B}'$ 是Λ 的决定系统.

证(2)⇒(3) 设结论(2)成立,按 z 的定义及(3.1.12)式即可得结论(3).

证(3)⇒(4) 若结论(3)成立,设 $x \in u, y \in v$ 于是$x, y \in \Lambda$ 且

$$x_j = y_j, \quad j = n-J+1,\cdots,n-1,$$

从而,按结论(3)定义的 $z \in u \cap v$,故结论(4)成立.

证(4)⇒(1) 设

$$\mathscr{B}' = \{B \in \mathscr{B} \mid B \not\prec \Lambda\},$$

其中,$\mathscr{B}$ 如(3.1.11),则

$$\Lambda \subseteq \Lambda_{\mathscr{B}'} = \{x \in \Sigma(N) \mid B \not\prec x, \forall B \in \mathscr{B}'\}.$$

如果 $\Lambda \neq \Lambda_{\mathscr{B}'}$,即 Λ 不是J 阶的,则存在 $B = (a_0 \cdots a_n)$, $n \geqslant J+1$ 使

$$B < \Lambda_{\mathscr{B}} \text{ 但 } B \not< \Lambda.$$

另一方面，能出现在 $\Lambda_{\mathscr{B}}$ 内的 J 序列也能出现在 Λ 内，因此

$$u = U_0[a_0, \cdots, a_{J-1}] \cap \Lambda \neq \varnothing,$$

$$v = U_{n-J+1}[a_{n-J+1}, \cdots, a_n] \cap \Lambda \neq \varnothing,$$

据(4)有

$$\varnothing = u \cap v = U_0[a_0, \cdots, a_n] \cap \Lambda,$$

与 $B \not< \Lambda$ 矛盾，故 Λ 是 J 阶有限型的. □

定义 3.1.8 设 (X, f) 是紧致拓扑动力系统，若其子系统

$$f|_M : M \to M$$

与符号动力系统 $(\Sigma(N), \sigma)$ 拓扑共轭，则称 M 为 f 的 N 转移不变集.

命题 3.1.5 若 M 是 f 的 N 转移不变集，则 M 同胚于康托尔三分集.

证明 由命题 3.1.2 直接可得. □

引理 3.1.1 [47] ψ 是从紧致空间 X 到 Hausdorff 空间 Y 的连续单射，则 ψ 是同胚.

定理 3.1.3 [48] 紧致系统 (X, f) 中 f 有 N 转移不变集的充要条件是存在 N 个两两不交的紧子集

$$A_0, \cdots, A_{N-1} \subset X,$$

满足条件

(1) $f(A_j) \supset \bigcup_{i=0}^{N-1} A_i, \quad j = 0, 1, \cdots, N-1.$

(2) $\operatorname{card}\left(\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s})\right) \leqslant 1, \quad \forall (i_0 i_1 \cdots) \in \Sigma(N).$

证明 首先证必要性. 设闭子集 $M \subset X$ 是 f 的一个 N 转移不变集，即存在同胚映射

$$h : M \to \Sigma(N),$$

使得

$$h \circ f|_M = \sigma \circ h.$$

记

$$A_i = h^{-1}(U_0[i]), \qquad i = 0, \cdots, N-1,$$

显然，$A_0, A_1, \cdots, A_{N-1}$ 是 M 中两两不交的闭子集，且

(1) $f(A_j) = f \circ h^{-1}(U_0[i]) = h^{-1} \circ \sigma(U_0[i])$

$$= h^{-1}(\Sigma(N)) = M \supset \bigcup_{i=0}^{N-1} A_i, \quad j = 0, \cdots, N-1.$$

(2) $\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s}) = \bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s} \circ h^{-1}(U_0[i_s]) = \bigcap_{s=0}^{\infty} h^{-1} \circ \sigma^{-s}(U_0[i_s])$

$$= h^{-1} \bigcap_{s=0}^{\infty} \sigma^{-s}(U_0[i_s]) = h^{-1}(\{i_0 i_1 \cdots\}).$$

上式右端是同胚映射作用于单点集,故

$$\mathrm{Card}(\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s})) = 1, \quad \forall (i_0 i_1 \cdots) \in \Sigma(N).$$

因而,必要性成立.

下证充分性.对任意 $k \in \mathbf{N}$,设$(i_0 \cdots i_k)$是 $S(N) = \{0, 1, \cdots, N-1\}$上的任意一个序列.利用归纳法,可以证明

$$f^k(\bigcap_{s=0}^{k} f^{-s}(A_{i_s})) = A_{i_k}. \tag{3.1.13}$$

事实上,当 $k=1$ 时显然成立.设上式对 k 已成立,且不难核验

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B. \tag{3.1.14}$$

利用上式,有

$$\begin{aligned} f^{k+1}(\bigcap_{s=0}^{k+1} f^{-s}(A_{i_s})) &= f \circ f^k\left(\bigcap_{s=0}^{k} f^{-s}(A_{i_s}) \cap f^{-k} \circ f^{-1}(A_{i_{k+1}})\right) \\ &= f\left(f^k\left(\bigcap_{s=0}^{k} f^{-s}(A_{i_s})\right) \cap f^{-1}(A_{i_{k+1}})\right) \\ &= f(A_{i_k} \cap f^{-1}(A_{i_{k+1}})) = A_{i_{k+1}}, \end{aligned}$$

故(3.1.3)式对一切 $k>0$ 成立.据康托尔交的性质,有

$$\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s}) \neq \varnothing.$$

按条件(2),集合$\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s})$对所有的$(i_0 i_1 \cdots) \in \Sigma(N)$是单点集,将其与所含点等同.记

$$C = A_0 \cup \cdots \cup A_{N-1}.$$

显然,C 与$f^{-s}(C)$是紧集.令

$$M = \bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(C) = \bigcup_{(i_0 i_1 \cdots)} \bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s}), \qquad (i_0 i_1 \cdots) \in \Sigma(N).$$

由 Tychonov 定理,M 是紧集.显然

$$f(M) \subset M.$$

定义 $h: M \to \Sigma(N)$为

$$h: \bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s}) \mapsto (i_0 i_1 \cdots).$$

显然,h 是满射,且由 A_j 两两不交知其为单射,故 h 是双射.下证 h 是同胚.

任取 $x \in M$,设

$$h(x) = (i_0 i_1 \cdots).$$

对任一 $n \in \mathbf{N}$,取含 $h(x)$的柱集 $U_0[i_0, \cdots, i_n]$,有

$$f^s(x) \in A_{i_s}, \quad s = 0, 1, \cdots, n.$$

取 $y \in M$,设

$$y = \bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{j_s}),$$

由 f 的连续性，当 y 充分接近 x 时，有

$$f^s(y) \in A_{i_s}, \quad s = 0, 1, \cdots, n,$$

即

$$y \in A_{i_0} \cap f^{-1}(A_{i_1}) \cap \cdots \cap f^{-n}(A_{i_n}) \cap \left(\bigcap_{s=n+1}^{\infty} f^{-s}(A_{j_s}) \right),$$

故

$$h(y) = (i_0 i_1, \cdots, i_n j_{n+1}, \cdots).$$

从而

$$h(y) \in U_0[i_0, \cdots, i_n],$$

即 h 在 $x \in M$ 处连续，由 x 的任意性，h 在 M 上连续．因 M 与 $\Sigma(K)$ 均是 Hausdorff 空间，故 h^{-1} 亦连续，从而 h 是同胚．

同时，有

$$h \circ f|_M = \sigma \circ h \tag{3.1.15}$$

在 M 上成立．事实上，设

$$\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s}) = \{x\}, \qquad (i_0 i_1 \cdots) \in \Sigma(N),$$

显然

$$\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_{s+1}}) = \{f(x)\},$$

因此

$$h \circ f(x) = (i_1 i_2 \cdots) = \sigma \circ (i_0 i_1 i_2 \cdots) = \sigma \circ h\left(\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s}) \right) = \sigma \circ h(x).$$

即(3.1.15)成立．于是，M 是 f 的 N 转移不变集，充分性成立．□

§3.2　符号动力系统

定理 3.2.1　设 $N \in \mathbf{N}$，则 $(\Sigma(N), \sigma)$ 具有如下的性质

(1) $PP(\sigma) = \mathbf{N}$.

(2) $\overline{\mathrm{Per}(\sigma)} = \Sigma(N)$.

证明　(1) 设 $n \in \mathbf{N}$，取 $x \in \Sigma(N)$ 使

$$x_{kn+j} = x_j, \quad j = 0, 1, \cdots, n-1, k \in \mathbf{Z},$$

则 x 是 σ 的一个 n 周期点．

(2) 对任一 $x \in \Sigma(N)$ 记

$$x = (\cdots, x_{-m}, \cdots, x_{-1}; x_0, x_1, \cdots, x_m, \cdots),$$

以

$$x_{-m},\cdots,x_{-1},x_0,x_1,\cdots,x_m$$

为一段，令其循环生成 $x^{(m)}\in\Sigma(N)$，使 $x^{(m)}$ 的起始位为 x_0，显然 $x^{(m)}\in \mathrm{Per}(\sigma)$，且

$$\lim_{m\to+\infty}x^{(m)}=x,$$

从而 $\overline{\mathrm{Per}(\sigma)}=\Sigma(N)$. □

由于 $\mathrm{Per}(\sigma)\subset\Omega(\sigma)$，故该定理说明全转移系统 $(\Sigma(N),\sigma)$ 无游荡点.

定理 3.2.2 $(\Sigma(N),\sigma)$ 是拓扑混合的.

证明 设 U 和 V 是双边符号空间 $\Sigma(N)$ 中的非空开集，取 $a\in U$，$b\in V$，则存在柱集 $U_m(a)$ 和 $V_m(b)$，使

$$U\supset U_m(a)=\{x\in\Sigma(N)\mid x_k=a_k,|k|\leqslant m\},$$

$$V\supset V_m(b)=\{x\in\Sigma(N)\mid x_k=b_k,|k|\leqslant m\},$$

其中，m 是一常数. 于是

$$\sigma^n(U)\cap V\supset\sigma^n(U_m(a))\cap V_m(b),\quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

而当 $n\geqslant 2m+1$ 时，有

$$\sigma^n(U_m(a))\cap V_m(b)=\{x\in\Sigma(N)\mid x_k=b_k,|k|\leqslant m;x_k=a_{k+n},\quad |k+n|\leqslant m\}\neq\varnothing.$$

联合前式，当 $n\geqslant 2m+1$ 时，有

$$\sigma^n(U)\cap V\neq\varnothing.$$

即 $(\Sigma(N),\sigma)$ 是拓扑混合的. 类似可证 $\Sigma(N)$ 是单边符号空间的情况. □

推论 3.2.1 $(\Sigma(N),\sigma)$ 是拓扑传递的.

证明 由于拓扑混合蕴函拓扑传递，故由定理 3.2.2 直接可得. □

下面讨论符号动力系统的混沌性质，为叙述简单起见，不妨使

$$S(2)=\{0,1\},$$

且 $\Sigma(2)$ 是单边符号空间，令

$$\Sigma(2)=\Sigma_0\cup\Sigma_1,$$

$$\Sigma_0=\{x\in\Sigma(2)\mid x_0=0\},$$

$$\Sigma_1=\{x\in\Sigma(2)\mid x_0=1\}.$$

对于一般情况下的 $\Sigma(N)$，可类似地进行讨论，并且可以证明比如下更强的结论. 关于这方面的讨论，可参考有关文献，例如文献[46].

首先，对任一 $r\in(0,1)$，归纳定义 $M^r=\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$，其中 $E_n=\Sigma_0$ 或 Σ_1.

step1 设 $l_0\in\mathbf{N}$ 是使 $[l_0r]=1$ 的最小正整数，记 $\alpha=l_0^2$，定义

$$M_\alpha^r=\{E_0^r,E_1^r,\cdots,E_\alpha^r\},$$

其中

$$E_k^r = \Sigma_0 \quad (0 \leqslant k < \alpha), \qquad E_\alpha^r = \Sigma_1.$$

step2 当 $l > l_0$ 时,记 $\alpha = l^2, \beta = (l-1)^2$. 设 M_β^r 已有定义,定义

$$M_\alpha^r = \{E_0^r, E_1^r, \cdots, E_\alpha^r\},$$

其中

$$\{E_0^r, E_1^r, \cdots, E_\beta^r\} = M_\beta^r,$$

$$E_k^r = \Sigma_0, \quad \beta < k < \alpha,$$

$$E_\alpha^r = \begin{cases} \Sigma_0, & [lr] - [(l-1)r] = 0, \\ \Sigma_1, & [lr] - [(l-1)r] = 1. \end{cases}$$

至此 M^r 归纳定义完毕. □

类似于第二章定理 2.4.3 中的证明,可以证明如下引理.

引理 3.2.1 设$0 < \eta < \theta < 1$,记$P(M, l) = \mathrm{Card}(\{i \mid E_i = \Sigma_1, i = 0, 1, \cdots, l\})$,有

(1)$P(M^\eta, l^2) = [l\eta], \quad \forall \eta \in (0,1)$.

(2)$\lim\limits_{l \to 0} \dfrac{P(M^\eta, l^2)}{l} = \eta, \quad \forall \eta \in (0,1)$.

(3)任给 $L > 0$,存在 $l > L$ 使 $x_t^\eta \neq x_t^\theta$,其中 $t = l^2$. □

定理 3.2.3 设$(\Sigma(2), \sigma)$为单边符号动力系统,对任一点 $x \in \Sigma(2)$,存在一个混沌集 C_x,使

(1) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup d(\sigma^n(y), \sigma^n(z)) > 0, \quad \forall y, z \in C_x, y \neq z$.

(2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \inf d(\sigma^n(y), \sigma^n(z)) = 0, \quad \forall y, z \in C_x$.

证明 对任一 $x \in \Sigma(2)$,定义

$$C_x = \{x^r \in \Sigma(2) \mid r \in (0,1), x_n^r \neq x_n \Leftrightarrow \exists\, l > 0 \text{ 使 } n = l^2$$
$$\text{且}[(l+1)r] - [lr] = 1, \forall n \geqslant 0\}.$$

显然,C_x 是不可数集.

(1)由引理 3.2.1,当 $0 < \eta < \theta < 1$ 时存在 $l_1 < l_2 < l_3 < \cdots$ 使

$$x_\alpha^\eta \neq x_\alpha^\theta, \alpha = l_j^2, \quad \forall j > 0.$$

于是

$$d(\sigma^\alpha(x^\eta), \sigma^\alpha(x^\theta)) \geqslant 1, \quad \alpha = l_j^2, \quad \exists j > 0.$$

从而结论(1)成立.

(2)对任意 $l > 0$,记 $n = l^2$,由 C_x 的构造,$\sigma^{n+1}(x^\eta)$和 $\sigma^{n+1}(x^\theta)$的前 $2l$ 个符号相同,于是

$$0 \leqslant d(\sigma^{n+1}(x^\eta), \sigma^{n+1}(x^\theta)) \leqslant \sum_{k=(l+1)^2}^{+\infty} \frac{1}{2^k}, \quad n = l^2,$$

从而结论(2)成立. □

定理 3.2.4 在$(\Sigma(N),\sigma)$中，$\mathrm{ent}(\sigma)=\log N$.

证明 仅就 $\Sigma(N)$是单边符号空间的情况进行证明. 由于 Bowen 拓扑熵与度量选取无关. 不妨取

$$\rho(x,y)=\max_n\left\{\frac{1}{n+1}\,\middle|\,x_n\neq y_n\right\},\quad \forall\, x,y\in\Sigma(N)$$

为 $\Sigma(N)$的度量.

设$0<\varepsilon<1$，而 $m>0$ 是使 $1/m\leqslant\varepsilon$ 成立的最小正整数，记

$$S_{m,n}=\{P=(a_0,a_1,\cdots,a_{m+n-1})\mid a_j\in S(N),j=0,1,\cdots,m+n-1\},$$

$$P_{m,n}=\{PP\cdots\in\Sigma(N)\mid P\in S_{m,n}\}.$$

显然

$$\mathrm{Card}(S_{m,n})=\mathrm{Card}(P_{m,n})=N^{m+n},$$

且 $P_{m,n}$是$(\Sigma(N),\sigma)$上的一个(n,ε)张成集. 事实上，对任一 $x\in\Sigma(N)$，取 $y\in P_{m,n}$，使

$$y_j=x_j,\quad j=0,1,\cdots,m+n-1,$$

于是

$$\rho(\sigma^k(x),\sigma^k(y))\leqslant\frac{1}{m}\leqslant\varepsilon,\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

从而由定义 2.6.2 有

$$r_n(\varepsilon)\leqslant N^{m+n}.$$

据定理 2.6.6 有

$$\mathrm{ent}(a)=\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(\varepsilon)\leqslant\log N. \tag{3.2.1}$$

另一方面，记

$$S_n=\{P=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})\mid a_j\in S(N),j=0,1,\cdots,n-1\},$$

$$P_n=\{PP\cdots\in\Sigma(N)\mid P\in S_n\},$$

显然

$$\mathrm{Card}(S_n)=\mathrm{Card}(P_n)=N^n,$$

且类似可证 P_n 是$(\Sigma(N),\sigma)$上的一个(n,ε)分离集. 同样，有

$$S_n(\varepsilon)\geqslant N^n,$$

且

$$\mathrm{ent}(\sigma)=\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log S_n(\varepsilon)\geqslant\log N, \tag{3.2.2}$$

联合(3.2.1)和(3.2.2)式有结论成立. □

§3.3　有限型子转移

设 $N\geqslant 2$, $(\Sigma(N),\sigma)$为状态空间 $S(N)=\{0,1,\cdots N-1\}$上的单边系统. 记 M_N 为 $N\times N$ 阶矩阵的集合, 其矩阵的元素为 0 或 1 称为 0, 1 矩阵.

设 $\Lambda\in M(\Sigma)$, $M(\Sigma)$定义如(3.1.3).

定义 3.3.1　称 0, 1 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in M_N$ 是子转移

$$\sigma_\Lambda:\Lambda\rightarrow\Lambda$$

或 Λ 的转移矩阵, 如果

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当}(ij)\prec\Lambda,\\ 0, & \text{其他情况},\end{cases}$$

其中(ij)是 $S(N)$上的 2 序列.

显然, 对于一个子转移 σ_Λ, 其转移矩阵是唯一确定的. 反之, 对任一 $\boldsymbol{A}\in M_N$, 能否唯一确定一个子转移呢? 下面讨论这一问题.

设 $\boldsymbol{A}\in M_N$, 记

$$\Sigma_{\boldsymbol{A}}=\{x\in\Sigma(N)\mid a_{x_ix_{i+1}}=1,\ \forall\, i\in\mathbf{Z}_+\}. \tag{3.3.1}$$

命题 3.3.1　$\Sigma_{\boldsymbol{A}}\in M(\Sigma)$, $\sigma(\Sigma_{\boldsymbol{A}})\subset\Sigma_{\boldsymbol{A}}$且子转移$\sigma_{\boldsymbol{A}}:\Sigma_{\boldsymbol{A}}\rightarrow\Sigma_{\boldsymbol{A}}$是有限型子转移.

证明　令

$$\mathscr{A}=\{(ij)\mid a_{ij}=0,\ \forall\, 0\leqslant i,j<N\},$$

则

$$\Lambda_{\mathscr{A}}=\{x\in\Sigma(N)\mid A\not\prec x,\ \forall\, A\in\mathscr{A}\}$$

是有限型的, 且容易验证

$$\Sigma_{\boldsymbol{A}}=\Lambda_{\mathscr{A}}.$$

据前证(3.1.5), $\Lambda_{\mathscr{A}}$闭且对 σ 不变, 故命题结论成立. □

例 3.3.1　若 $\boldsymbol{A}$ 中所有元素皆为 1, 则 $\Sigma_{\boldsymbol{A}}=\Sigma(N)$; 若 $\boldsymbol{A}$ 为单位矩阵, 则 $\Sigma_{\boldsymbol{A}}$ 中只有 N 个点. 矩阵

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

对应的 $\Sigma_{\boldsymbol{A}}$ 是空集; 矩阵

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

对应的 $\Sigma_{\boldsymbol{A}}$ 在双边序列时, 是同一个

$$\Sigma_{\boldsymbol{A}_3}=\Sigma_{\boldsymbol{A}_4}=\{(\cdots 1;11\cdots)\},$$

在单边情况时,是

$$\Sigma_{A_3} = \{(011\cdots),(11\cdots)\}, \quad \Sigma_{A_4} = \{(11\cdots)\}.$$

注 3.3.1 每一个有限型子转移,可以对应一个转移矩阵;反过来,每一个 0,1 矩阵也可以对应一个有限型子转移.但不是一一对应的.为了使这种对应是一一的,需要对 0,1 矩阵作出如下限制:

(1)不妨设 0,1 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{N\times N}$的每一行和每一列的元素均不全为 0,事实上,如果存在 $0\leqslant i\leqslant N-1$ 使

$$a_{ij} = 0, \quad j = 0,1,\cdots,N-1,$$

则 i 不出现在$\Sigma_{\boldsymbol{A}}$ 里元素的坐标分量中,于是可以讨论状态空间 $S(N-1)$上的符号动力系统,即将 i 从状态空间$S(N)$中删去,而讨论低一阶的系统.另一方面,如果存在 $0\leqslant j\leqslant N-1$ 使

$$a_{ij} = 0, \quad i = 0,1,\cdots,N-1,$$

当 $\Sigma_{\boldsymbol{A}}$ 是双边系统时,j 不可能出现在$\Sigma_{\boldsymbol{A}}$ 的点中;当 $\Sigma_{\boldsymbol{A}}$ 是单边系统时,j 只能作为第一个坐标分量出现,于是 $\sigma_{\boldsymbol{A}}$ 不是满射.这时,把第 j 行的元素,全部置为 0,得到一个同阶的 0,1 矩阵 $\boldsymbol{A}_1$,$\Sigma_{\boldsymbol{A}_1}$就是 $\Sigma_{\boldsymbol{A}}$ 中去掉以j 为第一坐标分量的点后所剩下的余集,在二者之上的子转移有相同的非游荡点集,故有相同的动力性状.从而,可讨论低一阶的系统.

(2)由于初等变换不改变 0,1 矩阵所决定的有限型子转移,故可以假设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{N\times N}$取如下形式的标准型

$$\begin{bmatrix} A_{k_1} & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & & \ddots & & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k_r} & & \\ A_{k_{r+1}k_1} & \cdots & A_{k_{r+1}k_r} & & A_{k_{r+1}} & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ A_{k_sk_1} & \cdots & & & & A_{k_sk_{s-1}} A_{k_s} \end{bmatrix}, \quad (3.3.2)$$

其中 $k_1+\cdots+k_s=N$, $k_i>0$, A_{k_i} 为不可约非负矩阵, $i=1,2,\cdots,s$; $A_{k_lk_1},\cdots,A_{k_lk_{l-1}}$中至少有一个不是 0 矩阵, $l=r+1,\cdots,s$. 矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{N\times N}$称为不可约矩阵,如果对任意固定的 $0\leqslant i,j\leqslant k$,存在 $n>0$,使得 $\boldsymbol{B}^n=(b_{ij}^{(n)})_{N\times N}$中有 $b_{ij}^{(n)}>0$.

其证明可见有关文献[46],这里不再赘述.后面将遵从该约定,而不再说明.

命题 3.3.2 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_N$,则

$$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \Sigma_{\boldsymbol{A}} \neq \Sigma_{\boldsymbol{B}}.$$

证明　充分性是显然的,下证必要性.记柱集 $U_m[i_0, \cdots, i_{n-1}]$在 $\boldsymbol{B}$ 上的相对柱集为

$$U_m[i_0, \cdots, i_{n-1}]_{\boldsymbol{B}} = U_m[i_0, \cdots, i_{n-1}] \cap \Sigma_{\boldsymbol{B}} = \{x \in \Sigma_{\boldsymbol{B}} | x_{m+0} = i_0, \cdots, x_{m+n-1} = i_{n-1}\}, \tag{3.3.3}$$

于是,按定义不难证明:对任意的 $0 \leqslant i, j < N$

$$b_{ij} = 1 \Leftrightarrow U_0[i, j]B \neq \varnothing, \tag{3.3.4}$$

设 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$,即存在 $0 \leqslant i, j < N$ 有 $a_{ij} = 0, b_{ij} = 1$.于是,按 $\Sigma_{\boldsymbol{A}}$ 的定义,(ij)在 $\Sigma_{\boldsymbol{A}}$ 中不出现;而按(3.3.4),(ij)在 $\Sigma_{\boldsymbol{B}}$中出现,故

$$\Sigma_{\boldsymbol{A}} \neq \Sigma_{\boldsymbol{B}}$$

成立.　□

推论 3.3.1　有

(1)M_N 与 $\sigma: \Sigma(N) = \Sigma(N)$的有限型子转移一一对应.

(2)设 $\boldsymbol{A} \in M_N$,则 $\sigma_{\boldsymbol{A}}(\Sigma_{\boldsymbol{A}}) = \Sigma_{\boldsymbol{A}}$.

证明　结论(1)由命题 3.3.2 直接可得.下证结论(2).设 $x = (x_0 x_1 \cdots) \in \Sigma_{\boldsymbol{A}}$,据注 3.3.1 的(1),存在 $i, 0 \leqslant i < k$,使得

$$a_{ix_0} = 1.$$

显然

$$(ix_0 x_1 \cdots) \in \Sigma_{\boldsymbol{A}},$$

于是

$$\sigma((ix_0 x_1 \cdots)) = x,$$

即

$$\sigma(\Sigma_{\boldsymbol{A}}) \supseteq \Sigma_{\boldsymbol{A}}.$$

再由命题 3.3.1 的 $\sigma(\Sigma_{\boldsymbol{A}}) \subseteq \Sigma_{\boldsymbol{A}}$ 知结论(2)成立.　□

定义 3.3.2　$S(N)$上的 n 个字母的序列 $i_0 i_1 \cdots i_{n-1}$称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的可允序列,若存在 $m \geqslant 0$ 使(3.3.3)定义的相对柱集 $U_m[i_0 i_1 \cdots i_{n-1}]_{\boldsymbol{A}} \neq \varnothing$成立.

§3.4　有限型子转移的动力性质

定理 3.4.1　设 $\boldsymbol{A} \in M_N, x \in \Sigma_{\boldsymbol{A}}$,则 $x \in \Omega(\sigma_{\boldsymbol{A}})$的充分必要条件是对任意的 $i > 0$,存在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的可允许序列 $x_i x_{i+1} \cdots x_0 x_1$.

证明　先证必要性.设 $x \in \Omega(\sigma_{\boldsymbol{A}})$,并任给 $i > 0$;取 $k > i$,于是,存在 $n > k$,使

$$(\sigma_{\mathbf{A}})^n(U_0[x_0\cdots x_k]_{\mathbf{A}})\cap U_0[x_0\cdots x_k]_{\mathbf{A}}\neq\varnothing.$$

即存在 $z\in U_0[x_0\cdots x_k]_{\mathbf{A}}$ 使

$$(\sigma_{\mathbf{A}})^n(z)\in U_0[x_0\cdots x_k]_{\mathbf{A}},$$

又取$(\sigma_{\mathbf{A}})^k(z)=y$,可得

$$y_0=z_k=x_k,\quad y_j=x_0,\quad j=n-k,$$

于是

$$x_ix_{i+1}\cdots x_ky_1\cdots y_{j-1}x_0x_1$$

是矩阵 $\mathbf{A}$ 的可允许序列,必要性得证.

下证充分性.设 $x=x_0x_1\cdots\in\Sigma_{\mathbf{A}}$,任给 $k>0$,取含 x 的相对柱集 $U_0[x_0\cdots x_k]_{\mathbf{A}}$,并取 $i\geqslant k$.按假设,存在可允许序列

$$x_ix_{i+1}\cdots x_{i+r}x_0x_1,\quad r>0,x_{i+r+1}=x_0.$$

令 $y=y_0y_1\cdots$,其中

$$y_m=\begin{cases}x_m, & 0\leqslant m\leqslant i+r,\\ x_{m-(i+r+1)}, & m\geqslant i+r+1.\end{cases}$$

显然

$$y\in U_0[x_0\cdots x_k]_{\mathbf{A}},\sigma^{i+r+1}(y)\in U_0[x_0\cdots x_k]_{\mathbf{A}},$$

即存在 $i+r+1$,使

$$\sigma_{\mathbf{A}}^{i+r+1}(U_0[x_0\cdots x_k]_{\mathbf{A}})\cap U_0[x_0\cdots x_k]_{\mathbf{A}}\neq\varnothing.$$

由 $k>0$ 的任意性,有 $x\in\Omega(\sigma_{\mathbf{A}})$,故充分性成立. □

定理 3.4.2 $\mathrm{Per}(\sigma_{\mathbf{A}})\neq\varnothing$ 且$\overline{\mathrm{Per}(\mathbf{A})}=\Omega(\sigma_{\mathbf{A}})$.

证明 只证后一结论.由于 $\mathrm{Per}(\mathbf{A})\subset\Omega(\sigma_{\mathbf{A}})$且 $\Omega(\sigma_{\mathbf{A}})$闭,故只需证

$$\Omega(\sigma_{\mathbf{A}})\subset\overline{\mathrm{Per}(\sigma_{\mathbf{A}})}.\tag{3.4.1}$$

任取 $x\in\Omega(\sigma_{\mathbf{A}})$及 $i>0$,由定理 3.4.1,存在矩阵 $\mathbf{A}$ 的可允许序列

$$x_ix_{i+1}\cdots x_{i+r}x_0x_1,\quad r>0,x_{i+r+1}=x_0.$$

于是

$$x_0x_1\cdots x_ix_{i+1}\cdots x_{i+r}$$

构成循环节,以此作 $\sigma_{\mathbf{A}}$周期点 p_i,有 $p_i\to x(i\to+\infty)$,故(3.4.1)成立. □

下面讨论 $\Omega(\sigma_{\mathbf{A}})$的结构问题.

引理 3.4.1 $\mathbf{A}=(a_{ij})\in M_N$ 不可约$\Leftrightarrow$对任意两个非零元素 a_{ij} 和 $a_{lm}(0\leqslant i,j,l,m<N)$,存在从 j 到 l 的可允许序列 $j\cdots l$.

证明 首先,设 $n>0$ 用数学归纳法不难验证

$$a_{ij}^{(n)}=\mathrm{card}(\{(i_0\cdots i_n)\mid(i_0\cdots i_n)\text{ 是可允许的},i_0=i,i_n=j\}).\tag{3.4.2}$$

下证必要性. 设 $\mathbf{A}$ 不可约, a_{ij} 和 a_{lm} 是 $\mathbf{A}$ 的任意两个非零元素. 于是, 存在 $n>0$ 使

$$a_{jl}^{(n)}>0.$$

按(3.4.2)式, 存在 $n+1$ 个字符的可允许序列

$$j\cdots l,$$

即必要性成立.

再证充分性. 设 a_{ij} 是 $\mathbf{A}$ 的任意一个元素($0\leqslant i, j<N$), 按注 3.3.1, 存在 $0\leqslant l, m<N$ 使 $a_{il}=1, a_{mj}=1$. 由假设, 存在可允许序列

$$l\cdots m.$$

显然, 序列

$$il\cdots mj,$$

也是可允许序列. 故存在 $n>0$, 按(3.4.2)式有

$$a_{ij}^{(n)}>0.$$

即 $\mathbf{A}=(a_{ij})$ 是不可约矩阵. □

定理 3.4.3　有限型子转移 $\sigma_{\mathbf{A}}$ 的非游荡点集

$$\Omega(\sigma_{\mathbf{A}})=\bigcup_{0\leqslant j\leqslant s}\Sigma_{\mathbf{A}_{kj}} \tag{3.4.3}$$

是有限型的, 其中 $\mathbf{A}$ 如标准型(3.3.2)式所示.

证明　首先, 证

$$\Omega(\sigma_{\mathbf{A}})\supseteq\bigcup_{0\leqslant j\leqslant s}\Sigma_{\mathbf{A}_{kj}}. \tag{3.4.4}$$

对上式右端任一 $x=(x_0x_1\cdots)$, 存在 $0\leqslant j\leqslant s$ 使 $x\in\Sigma_{\mathbf{A}_{kj}}$, 对任一 $i>0$ 有 $a_{x_0x_1}=1, a_{x_ix_{i+1}}=1$. 由于 $\mathbf{A}_{kj}$ 不可约, 按引理 3.4.1, 存在 $\Sigma_{\mathbf{A}_{kj}}$ 中, 亦即 $\mathbf{A}$ 中的可允许列

$$x_ix_{i+1}\cdots x_0x_1,$$

再按定理 3.4.1 有 $x\in\Omega(\sigma_{\mathbf{A}})$ 成立, 即(3.4.4)式成立. 下证

$$\Omega(\sigma_{\mathbf{A}})\subseteq\bigcup_{0\leqslant j\leqslant s}\Sigma_{\mathbf{A}_{kj}}. \tag{3.4.5}$$

对上式左端中任一元素 $x=(x_0x_1\cdots)$, 及任一 $i>0$ 存在 $\mathbf{A}$ 的可允许列

$$x_ix_{i+1}\cdots x_0x_1. \tag{3.4.6}$$

则存在 $0\leqslant j\leqslant s$ 使 $a_{x_0x_1}$ 在 $\mathbf{A}_{kj}$ 内. 若其不然, 由 $\mathbf{A}$ 的下三角标准型结构, 不可能存在非零的序列

$$a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\cdots a_{x_rx_0}a_{x_0x_1},$$

从而不存在可允许列

$$x_ix_{i+1}\cdots x_0x_1,$$

与(3.4.6)矛盾. 故

$$x_0x_1$$

是 $\mathbf{A}_{kj}$的可允许列. 利用(3.4.6)可归纳证明, 对任一 r 必有 $\mathbf{A}_{kj}$的可允许列

$$x_0x_1\cdots x_r.$$

令

$$p_r \in U_0[x_0x_1\cdots x_r]_{\mathbf{A}_{k_j}},$$

显然

$$P_r \to x, (r \to +\infty).$$

由 $\Sigma_{\mathbf{A}_{k_j}}$的闭性, 有 $x \in \Sigma_{\mathbf{A}_{k_j}}$, 即(3.4.5)式成立. 联合(3.4.4)与(3.4.5)有(3.4.3)式成立.

最后, 由(3.4.3)式, $\Omega(\sigma_{\mathbf{A}})$是由对角阵 $\mathrm{diag}[\mathbf{A}_{k_1}, \cdots, \mathbf{A}_{k_s}]$决定的对 σ 不变的闭子集, 因此是有限型的. □

引理 3.4.2 设 $\mathbf{A} \in M_N$ 已为标准型(3.3.2), 则

$$\Sigma_{\mathbf{A}} = \bigcup_{1\leqslant j\leqslant s} \Sigma_{\mathbf{A}_{kj}} \tag{3.4.7}$$

的充要条件是 $\mathbf{A} = \mathrm{diag}[\mathbf{A}_{k_1}, \cdots, \mathbf{A}_{k_s}]$, 即 $r = s$.

证明 将状态空间 $S(N$ 分解成 s 组互不相交的子集:

$$\{0, 1, \cdots, k_1 - 1\},$$
$$\{k_1, k_1 + 1, \cdots, k_1 + k_2 - 1\},$$
$$\cdots$$
$$\{k_1 + k_2 + \cdots + k_{s-1}, \cdots, k_1 + \cdots + k_s - 1\},$$

其中 $k_1 + \cdots + k_s = N$. $k_j \times k_j$ 阶 0,1 矩阵 $\mathbf{A}_{kj}(1 \leqslant j \leqslant s)$在由符号集$\{k_1 + \cdots + k_{j-1}, \cdots, k_1 + \cdots + k_j - 1\}$构成的符号空间上, 决定了一个有限型子转移

$$\sigma_{\mathbf{A}_{kj}}: \Sigma_{\mathbf{A}_{kj}} \to \Sigma_{\mathbf{A}_{kj}}$$

可以看作是 $\sigma_{\mathbf{A}}$的子转移. 于是

$$\bigcup_{1\leqslant j\leqslant s} \Sigma_{\mathbf{A}_{kj}} \subseteq \Sigma_{\mathbf{A}}, \tag{3.4.8}$$

下证必要性. 设(3.4.7)成立. 若 $\mathbf{A}$ 不是对角阵, 则存在 $r \leqslant t \leqslant s$ 使

$$\mathbf{A}_{k_tk_i} \neq 0$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant t$. 任取其中一个非零元素 $a_{\alpha\beta}$, 有

$$k_1 + \cdots + k_{t-1} \leqslant \alpha \leqslant k_1 + \cdots + k_t - 1,$$
$$\beta \leqslant k_1 + \cdots + k_{t-1} - 1,$$

即 α 和 β 不在前述分组的同一组中, 于是

$$U_m[\alpha\beta]_{\mathbf{A}_{k_tk_i}} \cap \Sigma_{\mathbf{A}_{kj}} = \varnothing, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

即

$$\bigcup_{1\leqslant j\leqslant s}\Sigma_{\mathbf{A}_{kj}}\subsetneqq\Sigma_{\mathbf{A}}$$

与假设矛盾,故必要性成立.

再证充分性.设 $\mathbf{A}=\mathrm{diag}[\mathbf{A}_{k_1},\cdots,\mathbf{A}_{k_s}]$成立.记

$$\Gamma=\{(\alpha\beta)\mid a_{\alpha\beta}=1,\ \forall\,0\leqslant\alpha,\beta\leqslant N-1\},$$

其中 $a_{\alpha\beta}$是$\mathbf{A}$ 中的元素,于是

$$\Sigma_{\mathbf{A}}=\bigcup_{\substack{(\alpha\beta)\in\Gamma\\ m\geqslant 0}}U_m[\alpha\beta]_{\mathbf{A}}.$$

当 $a_{\alpha\beta}\in\mathbf{A}_{kj}$时

$$U_m[\alpha\beta]_{\mathbf{A}}\subset\Sigma_{\mathbf{A}_{kj}},$$

有

$$\Sigma_{\mathbf{A}}\subseteq\bigcup_{1\leqslant j\leqslant s}\Sigma_{\mathbf{A}_{kj}},$$

联合(3.4.8)知(3.4.7)成立. □

定理 3.4.4 有限型子转移 σ_A 的非游荡点集

$$\Omega(\sigma_A)=\Sigma_{\mathbf{A}},$$

当且仅当 $\mathbf{A}=\mathrm{diog}[\mathbf{A}_{k_1},\cdots,A_{k_s}]$.

证明 由定理 3.4.3 和引理 3.4.2 直接可得. □

注 3.4.1 以上讨论可以采用图的语言和方法.0,1 矩阵 $\mathbf{A}\in M_N$ 可用如下条件定义一个有向图 $G(\mathbf{A})$:

1° a_{ij}是$G(\mathbf{A})$的一个顶点,当且仅当 $a_{ij}=1$.

2° 从顶点 a_{ij}到a_{lm}有一有向弧,记为 $a_{ij}\rightarrow a_{lm}$当且仅当$j=l$.

注意到如下等价条件:

对任意的 $i>0$, 存在矩阵 $\mathbf{A}$ 的可允许序列$x_ix_{i+1}\cdots x_0x_1$⇔存在从 $a_{x_ix_{i+1}}$到 $a_{x_0x_1}$的有向路径.

容易得到如下结论:

(1)设 $x\in\Sigma_{\mathbf{A}}$,则 $x\in\Omega(\sigma_{\mathbf{A}})$⇔对任意 $i>0$,存在从 $a_{x_ix_{i+1}}$到 $a_{x_0x_1}$的有向路径.

(2)$\Omega(\sigma_{\mathbf{A}})=\Sigma_{\mathbf{A}}$⇔$G(\mathbf{A})$的每一个顶点都有闭路通过. □

定理 3.4.5 设 $\sigma_{\mathbf{A}}$是有限型,则下列断言等价

(1)$\sigma_{\mathbf{A}}$是极小的.

(2)$\sigma_{\mathbf{A}}$拓扑传递且$\Sigma_{\mathbf{A}}$是有限集.

(3)$\Sigma_{\mathbf{A}}=\mathrm{Per}(\sigma_{\mathbf{A}})$且由 $\sigma_{\mathbf{A}}$的一条周期轨迹组成.

(4)$\mathbf{A}$ 的每一行和每一列只有一个不在主对角线上的非零元素.

证明 (1)⇒(2) 设 $\sigma_{\mathbf{A}}$是极小映射,而极小性蕴涵拓扑传递性.由定理 3.4.2,$\mathrm{Per}(\sigma_{\mathbf{A}})\neq\varnothing$,取 $x\in\mathrm{Per}(\sigma_{\mathbf{A}})$有

$$\Sigma_A = \overline{\mathrm{Orb}(x)},$$

而 $\mathrm{Orb}(x)$是有限集，故 Σ_A 是有限集.

(2)⇒(3) 设 Σ_A是有限集，若 $\Sigma_A \neq \mathrm{Per}(\sigma_A)$，则任一 $y \in \Sigma_A \setminus \mathrm{Per}(\sigma_A)$ 使$\overline{\mathrm{Orb}(y)} \neq \Sigma_A$；再由 σ_A的拓扑传递性，存在 $x \in \mathrm{Per}(\sigma_A)$ 使 $y \in \Sigma_A = \overline{\mathrm{Orb}(x)}$ 与 $y \notin \mathrm{Per}(\sigma_A)$矛盾. 同样，若 $\Sigma_A = \mathrm{Per}(\sigma_A)$但至少包含两条不同的周期轨道 $\mathrm{Orb}(x)$和 $\mathrm{Orb}(y)$，由 σ_A的拓扑传递性，存在 $z \in \mathrm{Per}(\sigma_A)$使

$$\mathrm{Orb}(x) \cup \mathrm{Orb}(y) \subset \overline{\mathrm{Orb}(z)} = \Sigma_A,$$

与 $\mathrm{Orb}(x) \neq \mathrm{Orb}(y)$矛盾. 故结论(3)成立.

(3)⇒(4) 设结论(3)成立. 若存在 $0 \leqslant i < N$ 使$a_{ii} = 1$，则 Σ_A中存在每个分量都为 i 的点 $x = (iii\cdots)$. 显然 $\mathrm{Orb}(x) = \{x\}$，有 $\Sigma_A = \{x\}$与 $\boldsymbol{A}$ 的假设矛盾.

如果 $\boldsymbol{A}$ 的第i 行有两个元素不为 0，即存在 $t \neq s$ 使

$$a_{it} = 1, \quad a_{is} = 1,$$

则存在 $x, y \in \Sigma_A = \mathrm{Per}(\sigma_A)$使

$$y \in U_0[is]_A, \quad x \in U_0[it]_A,$$

显然 $\mathrm{Orb}(x)$与 $\mathrm{Orb}(y)$是两条不同的周期轨道，与断言(3)矛盾. 同理，可证列的情况，于是结论(4)成立.

(4)⇒(1) 设断言(4)成立，则存在 N 个由 N 个字符组成的可允许列：

$$i_0 i_1 \cdots i_{N-1},$$

$$i_1 i_2 \cdots i_0,$$

$$\cdots$$

$$i_{N-1} i_0 \cdots i_{N-2};$$

于是 $\Sigma_A = \{x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots, x^{(N-1)}\}$，其中 $x^{(j)}$是上述第 j 个可允许循环生成的，$j = 0, 1, \cdots, N-1$. 直接验证，可知 σ_A是极小的. □

推论 3.4.1 如果 σ_A是极小的，有

(1)Σ_A是平凡极小集.

(2)$\mathrm{ent}(\sigma_A) = 0$.

证明 由定理 3.4.5 知 Σ_A由σ_A的一条周期轨道组成，故 Σ_A是平凡极小集；并且，由 Σ_A是有限集知 $\mathrm{ent}(\sigma_A) = 0$. □

与极小有限型子转移不同，对于一般极小子转移，可以有正拓扑熵[50].

定理 3.4.6 设 σ_A是有限型子转移，则下列断言等价：

(1)σ_A拓扑传递.

(2)$\boldsymbol{A}$ 不可约.

(3)对任意 $0 \leqslant i, j < N$，存在 $n > 0$，使

$$\{x \in \Sigma_{\mathbf{A}} | x_0 = i, x_n = j\} \neq \varnothing.$$

证明　(1)⇒(2)　设 $x \in \Sigma_{\mathbf{A}}$ 使

$$\overline{\mathrm{Orb}(x)} = \Sigma_{\mathbf{A}}.$$

由引理 3.4.1，只须证从 $a_{x_0x_1}$ 到 $\mathbf{A}$ 的任一非零元素 $a_{lm}(0 \leqslant l, m < N)$ 存在以 x_1 到 l 的可允许序列即可. 设 $y = (lmy_2y_3\cdots)$，存在 $k > 0$ 使

$$d(\sigma_{\mathbf{A}}^k(x), y) < \frac{1}{2},$$

从而 $x_{k_1} = l, x_{k_1+1} = m$ 于是

$$x_1x_2\cdots x_{k_1}, \quad x_{k_1} = l$$

是从 x_1 到 l 的可允许序列. 由此可证 $\mathbf{A}$ 不可约.

(2)⇒(3)　对任给 $0 \leqslant i, j < N$，设 $\mathbf{A}$ 不可约，即存在 $n > 0$ 使

$$a_{ij}^{(n)} > 0,$$

由(3.4.2)式可证结论(3)成立.

(3)⇒(1)　任取 $\mathbf{A}$ 的两个相对柱形 $U_0[i_0\cdots i_n]_{\mathbf{A}}$ 和 $U_0[j_0\cdots j_m]_{\mathbf{A}}$ 其中，$n, m > 0$，设断言(3)成立，即存在从 i_n 到 j_0 的可允许序列

$$i_nl_1, \cdots, l_tj_0 \quad (t > 0).$$

显然

$$U_0[i_0\cdots i_nl_1\cdots l_tj_0\cdots j_m]_{\mathbf{A}} \subset U_0[i_0\cdots i_n]_{\mathbf{A}},$$

于是

$$\sigma_{\mathbf{A}}^{n+t+1}(U_0[i_0\cdots i_nl_1\cdots l_tj_0\cdots j_m]_{\mathbf{A}}) = U_0[j_0\cdots j_m]_{\mathbf{A}} \subset \sigma_{\mathbf{A}}^{n+t+1}(U_0[i_0\cdots i_n]_{\mathbf{A}}),$$

即

$$U_0[j_0\cdots j_m]_{\mathbf{A}} \cap \sigma_{\mathbf{A}}^{n+t+1}(U_0[i_0\cdots i_n]_{\mathbf{A}}) \neq \varnothing,$$

由定理 2.3.2，$\sigma_{\mathbf{A}}$ 是拓扑传递的. □

推论 3.4.2　$\Omega(\sigma_{\mathbf{A}}) = \Sigma_{\mathbf{A}}$，当且仅当 $\sigma_{\mathbf{A}}$ 是拓扑传递的.

证明　由引理 3.4.1 可以证明如下事实：

$$\mathbf{A} \in M_N \text{ 不可约} \Leftrightarrow G(\mathbf{A}) \text{ 有一条闭路过所有的顶点}.$$

利用这一事实，按定理 3.4.6 和注 3.4.1 的结论(2)，可直接得到该推论. □

定理 3.4.7　有限型子转移，$\sigma_{\mathbf{A}}: \Sigma_{\mathbf{A}} \to \Sigma_{\mathbf{A}}$ 是拓扑混合的，当且仅当 $\mathbf{A}$ 是非周期的，即存在 $M > 0$ 使 $\mathbf{A}^M > 0$(即 $(\mathbf{A}^M)_{ij} > 0, \forall 0 \leqslant i, j < N$).

证明　首先证必要性. 取 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 的非空相对柱集

$$U_i = U_0[i]_{\mathbf{A}}, \quad i = 0, 1, \cdots N-1.$$

设 $\sigma_{\mathbf{A}}$ 是拓扑混合的，于是对任意 $i, j \in S(N)$，存在正整数 N_{ij}，当 $n > N_{ij}$ 时

$$\sigma_{\mathbf{A}}^n(U_i) \cap U_j \neq \varnothing,$$

取 $z \in \sigma_{\mathbf{A}}^n(U_i) \cap U_j$，存在 $x \in U_i$ 使 $z = \sigma_{\mathbf{A}}^n(x)$，故

$$x_0 x_1 \cdots x_n, \quad x_0 = i, x_n = j$$

是 $\Sigma_{\mathbf{A}}$ 上的可允许列．由(3.4.2)式有 $a_{ij}^{(n)} > 0$，于是取 $M > \max\limits_{i,j} N_{ij}$，可得 $\mathbf{A}^M > 0$，即 $\mathbf{A}$ 是非周期的．

下证充分性．设 $\mathbf{A}$ 是非周期的，即存在 $M > 0$ 当 $m \geqslant M$ 时，有 $\mathbf{A}^m > 0$．任取 $\Sigma_{\mathbf{A}}$ 中的两个非空开集 U 和 V，$s \in U$，$t \in V$，则存在 $k \geqslant 0$ 使

$$U_K(s) = U_0[s_0 \cdots s_k]_{\mathbf{A}} \subset U, \quad U_K(t) = U_0[t_0 \cdots t_k]_{\mathbf{A}} \subset V.$$

对一切 $n \geqslant k + M$，记 $m = n - k \geqslant M$ 有

$$a_{t_k s_0}^{(m)} > 0.$$

按(3.4.2)式，存在可允许序列

$$c_0 c_1 \cdots c_m, \quad c_0 = t_k, \quad c_m = s_0.$$

于是对任一 $n = m + k \geqslant M$，可取到 $\Sigma_{\mathbf{A}}$ 中的元素：

$$x = (t_0 \cdots t_k c_1 \cdots c_{m-1} s_0 \cdots s_k \cdots) \in U_0[t_0 \cdots t_k]_{\mathbf{A}} \subset V,$$

满足

$$\sigma_{\mathbf{A}}^n(x) \in U.$$

从而 $\sigma_{\mathbf{A}}$ 在 $\Sigma_{\mathbf{A}}$ 上是拓扑混合的． □

§3.5 有限型子转移的拓扑熵与混沌

设 (X, f) 是紧致拓扑动力系统，$\mathscr{A}$ 是 X 上的一个开覆盖．记号

$$\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\mathscr{A}) = \mathscr{A} \vee f^{-1}(\mathscr{A}) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\mathscr{A}),$$

同于§2.6中的定义，也是 X 上的一个开覆盖．

定义 3.5.1 称 X 的开覆盖 $\mathscr{A}$ 是 f 的一个生成子，若对 $\mathscr{A}$ 的元素的任意序列 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 使得

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(A_n)$$

至多包含 X 的一个点．

定义 3.5.2 称映射 f 是扩张映射，如果存在 $\delta > 0$．使得 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$ 时，存在 $n > 0$ 满足

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \delta,$$

并称 δ 为 f 的扩张常数．

命题 3.5.1 f 是扩张映射，当且仅当 f 有生成子．

证明 首先证必要性．设 $\delta > 0$ 是扩张映射 f 的扩张常数，$\mathscr{A}$ 是一个半径

为$\delta/2$的开球构成的有限开覆盖，$\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$是$\mathscr{A}$中元素的一个序列．当$x,y\in X$，使

$$x,y\in\bigcap_{n=0}^{\infty}f^{-n}(A_n)$$

时，有

$$d(f^n(x),f^n(y))\leqslant\delta,\quad\forall n\geqslant 0,$$

按f的定义，$x=y$，故$\mathscr{A}$是f的生成子．

现证充分性．设$\mathscr{A}$是f的生成子，δ是$\mathscr{A}$的 Lebesgue 数．如果$x,y\in X$使

$$d(f^n(x),f^n(y))\leqslant\delta,\quad\forall n\geqslant 0,$$

则按 Lebesgue 数的定义，存在$A_n\in\mathscr{A}$使

$$\{f^n(x),f^n(y)\}\subset A_n,\quad\forall n\geqslant 0,$$

即

$$x,y\in\bigcap_{n=0}^{\infty}f^{-n}(A_n).$$

按生成子的定义，有$x=y$；从而$x\neq y$时，存在$n>0$使

$$d(f^n(x),f^n(y))>\delta,$$

即f是扩张的．　□

定理 3.5.1　若$\mathscr{A}$是f的一个生成子，则

$$\mathrm{ent}(f)=\mathrm{ent}(f,\mathscr{A}).$$

证明　设$\mathscr{B}$是X的一个开覆盖，其 Lebesgue 数$\delta>0$．可以证明：存在$N>0$，使得

$$d(U)<\delta,\quad\forall U\in\bigvee_{n=0}^{N}f^{-n}(\mathscr{A}).\tag{3.5.1}$$

若其不然，对每一个$j>0$，存在x_j和y_j，使$d(x_j,y_j)>\delta$且$\mathscr{A}$有元素$A_{j,i}$，$(0\leqslant i<j)$，满足

$$x_j,y_j\in\bigcap_{i=0}^{j}f^{-i}(\overline{A}_{j,i}).$$

由X的紧致性，存在$\{j\}_{j>0}$的子列$\{j_k\}_{k=1}^{\infty}$使

$$x_{j_k}\to x,\ y_{j_k}\to y\quad(k\to+\infty),$$

显然$x\neq y$．因为$\mathscr{A}$是有限覆盖，故可设

$$x_{j_k},y_{j_k}\in A_0\in\mathscr{A},\quad\forall k>0$$

于是

$$x,y\in\overline{A}_0.$$

同理，对任意$0\leqslant n<j$可设

$$x_{j_k},y_{j_k}\in f^{-n}(\overline{A}_n),\quad A_n\in\mathscr{A}.$$

于是

$$x, y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\overline{A}_n)$$

与 $\mathscr{A}$ 是生成子矛盾,故(3.5.1)成立.从而

$$\mathscr{B} < \bigvee_{n=0}^{N} f^{-n}(\mathscr{A}).$$

于是

$$\mathrm{ent}(f, \mathscr{B})) \leqslant \mathrm{ent}\left(f, \bigvee_{n=0}^{N} f^{-n}(\mathscr{A})\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{i=0}^{k-1} f^{-i}\left(\bigvee_{n=0}^{N} f^{-n}(\mathscr{A})\right)\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{n=0}^{N+k-1} f^{-n}(\mathscr{A})\right) = \mathrm{ent}(f, \mathscr{A})$$

对任一开覆盖 $\mathscr{B}$ 成立,故结论成立. □

在符号动力系统$(\Sigma(N), \sigma)$中,定义

$$A_j = \{x \in \Sigma(N) \mid x_0 = j\}, \quad j = 0, 1, \cdots, N-1, \tag{3.5.2}$$

记

$$\mathscr{A} = \{A_0, A_1, \cdots, A_{N-1}\}.$$

命题 3.5.2 设 A_j 如(3.5.2)定义,有如下结论

(1) $\mathscr{A}$ 是 σ 的一个生成子,称为 σ 的自然生成子.

(2) $\sigma: \Sigma(N) \to \Sigma(N)$ 是可扩的.

(3) 子转移 $\sigma_\Lambda: \Lambda \to \Lambda$ 亦是可扩的,且

$$\mathscr{A}_\Lambda = \{A_j \cap \Lambda \mid j = 0, 1, \cdots, N-1\}$$

是 σ_Λ 的一个生成子.

证明留作练习. □

设 $M(\Sigma)$ 如定义(3.1.3).

定理 3.5.2 设 $\Lambda \in M(\Sigma)$ 记

$$Q_n(\Lambda) = \{(i_0 \cdots i_{n-1}) \mid U_0[i_0 \cdots i_n]_\Lambda \neq \varnothing\}.$$

则

$$\mathrm{ent}(\sigma_\Lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{Card}(Q_n(\Lambda)).$$

证明 由命题 3.5.2, $\mathscr{A}_\Lambda$ 是 σ_Λ 的一个生成子,于是

$$\mathrm{ent}(\sigma_\Lambda) = \mathrm{ent}(\sigma_\Lambda, \mathscr{A}_\Lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \sigma_\Lambda^{-k}(\mathscr{A}_\Lambda)\right). \tag{3.5.3}$$

另一方面,对任一$(i_0 \cdots i_{n-1}) \in Q_n(\Lambda)$,显然有

$$U_0[i_0 \cdots i_{n-1}]_\Lambda \neq \varnothing \Leftrightarrow A_{i_0} \cap \sigma_\Lambda^{-1}(A_{i_1}) \cap \cdots \cap \sigma_\Lambda^{-(n-1)}(A_{i_{n-1}}) \neq \varnothing,$$

其中 $A_{i_j} \in \mathscr{A}_\Lambda$,令

$$(i_0, \cdots, i_{n-1}) \mapsto A_{i_0} \cap \sigma_\Lambda^{-1}(A_{i_1}) \cap \cdots \cap \sigma_\Lambda^{-(n-1)}(A_{i_{n-1}}),$$

于是,可建立

$$Q_n(\Lambda) \to \bigvee_{k=0}^{n-1} \sigma_\Lambda^{-k}(\mathscr{A}_\Lambda)$$

的一一对应. 从而

$$\log\mathrm{Card}(Q_n(\Lambda)) = \log N\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \sigma_\Lambda^{-k}(\mathscr{A}_\Lambda)\right) = H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \sigma_\Lambda^{-k}(\mathscr{A}_\Lambda)\right)$$

代入(3.5.3)即有结论成立. □

定理 3.5.3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in M_N$, $\rho(\boldsymbol{A})$是 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径, 则

$$\mathrm{ent}(\sigma_{\boldsymbol{A}}) = \log\rho(\boldsymbol{A}).$$

证明 记

$$\begin{aligned} Q_n(\Sigma_{\boldsymbol{A}}) &= \{(i_0\cdots i_{n-1}) \mid U_0[i_0\cdots i_n] \neq \varnothing\} \\ &= \{(i_0\cdots i_{n-1}) \mid a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2}\cdots a_{i_{n-2} i_{n-1}} = 1\}. \end{aligned}$$

利用(3.4.2), 有

$$\mathrm{Card}(Q_n(\Sigma_{\boldsymbol{A}})) = \sum_{i_0,\cdots,i_{n-1}=0}^{n-1} a_{i_0 i_1}\cdots a_{i_{n-2} i_{n-1}} = \sum_{i_0, i_{n-1}=0}^{n-1} a_{i_0 i_{n-1}}^{(n-1)}.$$

在 M_N 上定义范数

$$\|\boldsymbol{B}\| = \sum_{i,j=0}^{N-1} |b_{ij}|, \quad \forall \boldsymbol{B} = (b_{ij}) \in M_N,$$

则

$$\mathrm{Card}(Q_n(\Sigma_{\boldsymbol{A}})) = \|\boldsymbol{A}^{n-1}\|.$$

利用定理 3.5.2 和已有结论[49]:

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{A}^n\|^{1/n},$$

得

$$\begin{aligned} \mathrm{ent}(\sigma_{\boldsymbol{A}}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\mathrm{Card}(Q_n(\Sigma_{\boldsymbol{A}})) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\|\boldsymbol{A}^{n-1}\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}\log\|\boldsymbol{A}^{n-1}\|^{\frac{1}{n-1}} = \log\rho(\boldsymbol{A}). \end{aligned}$$ □

定理 3.5.4 设 $\boldsymbol{A}\in M_N$ 是不可约矩阵, 则

$$\mathrm{ent}(\sigma_{\boldsymbol{A}}) = 0$$

当且仅当 $\sigma_{\boldsymbol{A}}$是极小的.

证明 充分性由推论3.4.1给出, 现证必要性. 若$\sigma_{\boldsymbol{A}}$非极小, 按定理3.4.5, 存在 $0\leqslant i_0, i_s, i_t < N$ 使

$$a_{i_0 i_s} = 1, \quad a_{i_0 i_t} = 1,$$

再由 $\boldsymbol{A}$ 不可约知$\sigma_{\boldsymbol{A}}$是拓扑传递的, 于是 $i_s\neq i_0$, $i_t\neq i_0$, 并且利用引理3.4.1, 可以得到两个可循环的允许列

$$i_0\cdots i_s\cdots i_0,$$

$$i_0\cdots i_t\cdots i_0.$$

由此,可作出如下两个长度相同的可允许列

$$i_0 i_1\cdots i_{r-1},\quad i_r = i_0, r\geqslant 2, \tag{3.5.4}$$

$$i_0 i_1'\cdots i_{r-1}',\quad i_r' = i_0, r\geqslant 2, \tag{3.5.5}$$

但至少有一个 $i_j\neq i_j'(0<j<r)$,从而得到如下的树

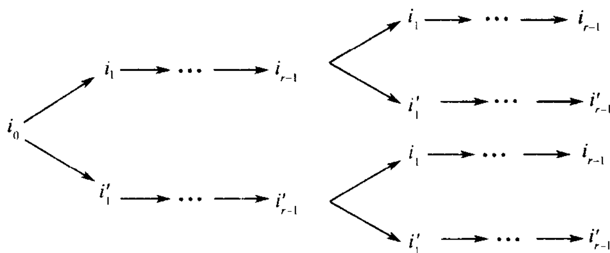


图 3.5.1 可允许列生成的树

任何从根结点 i_0 起始的沿树的路径连续选取 n 个字符组成 n 序列都是可允许的,记这样得到的 n 序列的集合为 P_n,归纳可证

$$\mathrm{Card}(P_{nr+j}) = 2^{n+1},\quad j = 2,\cdots,r+1,\quad \forall\, n\geqslant 0.$$

显然

$$\mathrm{Card}(P_n)\leqslant \mathrm{Card}(Q_n(\Sigma_A)),$$

按定理 3.5.2 有

$$\begin{aligned}\mathrm{ent}(\sigma_A) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mathrm{Card}(Q_n(\Sigma_A))\geqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mathrm{Card}(P_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{nr+j}\log 2^{n+1} = \frac{1}{r}\log 2>0,\end{aligned}$$

与所设 $\mathrm{ent}(\sigma_A)=0$ 矛盾,故 σ_A 极小. □

定理 3.5.5 设 $A\in M_N$ 是不可约的,则 σ_A 是混沌的充要条件是 $\mathrm{ent}(\sigma_A)>0$.

证明 先证必要性,设 σ_A 是混沌的.若 $\mathrm{ent}(\sigma_A)=0$,则 σ_A 是极小的;再由定理 3.4.5 的结论(3),Σ_A 由 σ_A 的一条周期轨道组成,故 σ_A 不可能是混沌的,与前设矛盾,从而 $\mathrm{ent}(\sigma_A)>0$.

下证充分性,设 $\mathrm{ent}(\sigma_A)>0$,即 σ_A 不是极小的,正如定理 3.5.4 的证明,存在两个循环列,如(3.5.4)和(3.5.5),记其为

$$P = (i_0 i_1\cdots i_{r-1}),\qquad Q = (i_0 i_1'\cdots i_{r-1}').$$

对每一个实数 $\eta\in(0,1)$,令

$$x^{\eta} = M_0^{\eta} M_1^{\eta}, \cdots$$

其中，$M_i^{\eta} = P$ 当且仅当存在 $l \in \mathbf{N}$ 使得

$$i = l^2 \text{ 且} [(l+1)\eta] - [l\eta] = 1;$$

否则，$M_i^{\eta} = Q$ 显然

$$x^{\theta} \neq x^{\eta}, \quad \forall \theta, \eta \in (0,1), \theta \neq \eta.$$

类似于定理 3.2.3 的证明，对任意 $\theta, \eta \in (0,1)$，可证

$$\limsup_{n\to\infty} d(\sigma_{\mathbf{A}}^n(x^{\theta}), \sigma_{\mathbf{A}}^n(x^{\eta})) > 0, \quad \theta \neq \eta;$$

$$\liminf_{n\to\infty} d(\sigma_{\mathbf{A}}^n(x^{\theta}), \sigma_{\mathbf{A}}^n(x^{\eta})) = 0.$$

即 σ_A 是混沌的. □

§3.6　Smale 马蹄

Smale 马蹄(Smale Horseshoe)是 S. Smale 在 1965 年研究微分动力系统时构造出的一个数学模型[51].

记 $\mathbf{R}^2$ 中的正方形

$$Q = [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbf{R}^2.$$

定义 3.6.1　称映射 $u:[-1,1] \to [-1,1]$ 的图像为 Q 中的水平曲线，若存在常数 $0<\mu<1$，使

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leqslant \mu |x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in [-1,1]$$

成立，如果两条水平曲线 u_1 和 u_2 满足条件

$$-1 \leqslant u_1(x) < u_2(x) \leqslant 1, \quad \forall x \in [-1,1],$$

则称

$$U = \{(x,y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, u_1(x) \leqslant y \leqslant u_2(x)\}$$

为 Q 中的一个水平条；这时该水平条的厚度定义为

$$\theta(U) = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \{u_2(x) - u_1(x)\}.$$

如果映射 $v:[-1,1] \to [-1,1]$ 满足条件

$$|v(y_1) - v(y_2)| \leqslant \mu |y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in [-1,1],$$

类似地，可定义垂直曲线，垂直条

$$V = \{(x,y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1, v_1(y) \leqslant x \leqslant v_2(y)\}$$

及其宽度 $\theta(V)$，等等.

引理 3.6.1　设 Q 中水平条序列

$$U^{(1)} \supset U^{(2)} \supset \cdots \supset U^{(k)} \supset \cdots$$

满足条件

$$\lim_{k\to\infty}\theta(U^{(k)}) = 0,$$

则该水平条序列的交集$\bigcap_{k=1}^{\infty}U^{(k)}$是一条水平曲线.对垂直条序列

$$V^{(1)}\supset V^{(2)}\supset\cdots\supset V^{(k)}\supset\cdots$$

也有类似的结论.

证明 设

$$U^{(k)} = \{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1, u_1^{(k)}(x)\leqslant y\leqslant u_2^{(k)}(x)\},$$

由于

$$\lim_{k\to\infty}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|u_2^{(k)}(x) - u_1^{(k)}(x)| = 0,$$

可定义函数 $u:[-1,1]\to[-1,1]$为

$$u(x) = \lim_{k\to\infty}u_2^{(k)}(x) = \lim_{k\to\infty}u_1^{(k)}(x).$$

显然

$$u_1^{(k)}\leqslant u(x)\leqslant u_2^{(k)}(x),\quad \forall x[-1,1], n\in\mathbf{N},$$

且

$$|u(x_1) - u(x_2)|\leqslant\mu|x_1 - x_2|,\quad \forall x_1,x_2\in[-1,1].$$

故水平曲线 $y = u(x)$即为上述水平条序列的交集. □

引理 3.6.2 Q 中一水平曲线$y=u(x)$与一垂直曲线 $x = v(y)$存在唯一的交点.

证明 (x,y)是交点,当且仅当 x 是方程

$$x = v(u(x))$$

的根.由水平曲线和垂直曲线的定义,有

$$\begin{aligned}|v(u(x_1)) - v(u(x_2))| &\leqslant\mu|u(x_1) - u(x_2)|\\ &\leqslant\mu^2|x_1 - x_2|,\quad \forall x_1,x_2\in[-1,1],\end{aligned}$$

而 $0<\mu^2<1$,从而 $v\circ u:[-1,1]\to[-1,1]$有唯一不动点. □

对 Q 中水平曲线u 和垂直曲线v,引入最大模范数

$$\|u\| = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\{|u(x)|\},\quad \|v\| = \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\{|v(x)|\},$$

设 $z=(x,y)\in Q$ 是u 和v 的交点,记

$$\|z\| = \max\{|x|,|y|\}.$$

引理 3.6.3 设 $z_j=(x_j,y_j)$是水平曲线 u_j 和垂直曲线v_j 的交点,$j=1,2$,则有估计式

$$\|z_1 - z_2\|\leqslant\frac{1}{1-\mu}\max\{\|u_1 - u_2\|,\|v_1 - v_2\|\}.$$

证明 由 $x_j = v_j(y_j)$, $j=1,2$,可证

$$|x_1 - x_2|\leqslant|v_1(y_1) - v_1(y_2)| + |v_1(y_2) - v_2(y_2)|$$

$$\leqslant \mu \| z_1 - z_2 \| + \| v_1 - v_2 \| .$$

类似地,有

$$| y_1 - y_2 | \leqslant \mu \| z_1 - z_2 \| + \| u_1 - u_2 \| .$$

于是

$$\| z_1 - z_2 \| \leqslant \mu \| z_1 - z_2 \| + \max\{ \| u_1 - u_2 \| , \| v_1 - v_2 \| \},$$

其中 $0<\mu<1$,从而结论成立. □

下面,设 $U_0, \cdots, U_{N-1}$和 $V_0, \cdots, V_{N-1}$分别是 Q 中 N 个两两不交的水平条和 N 个两两不交的垂直条.映射 $\varphi: Q \to \mathbf{R}^2$ 是从 Q 到 $\varphi(Q)$的同胚.

条件(H1)　对于 $j=0,1,\cdots,N-1$,有 $\varphi(U_j)=V_j$,并且 φ 映 U_j 的横边为 V_j 的横边,映 U_j 的竖边为 V_j 的竖边.

条件(H2)　存在常数 $\gamma \in (0,1)$,对于任意的水平条

$$U \subset \bigcup_{j=0}^{N-1} U_j,$$

使

$$\widetilde{U}_k = \varphi^{-1}(V_k \cap U)$$

是含于 U_k 内的水平条,且满足

$$\theta(\widetilde{U}_k) < \gamma\theta(U);$$

对于任意的垂直条

$$V \subset \bigcup_{j=0}^{N-1} V_j,$$

使

$$\widetilde{V}_i = \varphi(U_i \cap V)$$

是含于 V_i 内的垂直条,且满足

$$\theta(\widetilde{V}_i) < \gamma\theta(V). \quad □$$

记

$$S(N) = \{0,1,\cdots,N-1\}.$$

对于 $S(N)$中符号的有限序列

$$s_{-k}, \cdots, s_{-1}; s_0, s_1, \cdots, s_k,$$

引入如下记号

$$\begin{aligned} U_{s_0 s_1 \cdots s_k} &= \varphi^{-1}(V_{s_0} \cap U_{s_1 \cdots s_k}) = U_{s_0} \cap \varphi^{-1}(U_{s_1 \cdots s_k}) \\ &= U_{s_0} \cap \varphi^{-1}(U_{s_1}) \cap \cdots \cap \varphi^{-k}(U_{s_k}), \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

$$\begin{aligned} V_{s_{-k} \cdots s_{-1}} &= \varphi(U_{s_{-1}} \cap V_{s_{-k} \cdots s_{-2}}) = V_{s_{-1}} \cap \varphi(V_{s_{-k} \cdots s_{-2}}) \\ &= V_{s_{-1}} \cap \varphi(V_{s_{-2}}) \cap \cdots \cap \varphi^{k-1}(V_{s_{-k}}). \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

引理 3.6.4 设同胚 $\varphi: Q \to \varphi(Q)$满足 H1 和 H2,且 $k \geqslant 1$,则

(1) $U_{s_0 s_1 \cdots s_k}$和 $V_{s_{-k} \cdots s_{-1}}$分别是含于 $U_{s_0 s_1 \cdots s_k}$和 $V_{s_{-k+1} \cdots s_{-1}}$内的水平条与垂直条.

(2)
$$\varphi(U_{s_0 s_1 \cdots s_k}) = V_{s_0} \cap U_{s_1 \cdots s_k},$$
$$\varphi(V_{s_{-k} \cdots s_{-1}}) \cap V_{s_0} = V_{s_{-k} \cdots s_{-1} s_0}.$$

(3)
$$\theta(U_{s_0 s_1 \cdots s_k}) \leqslant \gamma \theta(U_{s_1 \cdots s_k}) < \gamma^k,$$
$$\theta(V_{s_{-k} \cdots s_{-2} s_{-1}}) \leqslant \gamma \theta(V_{s_{-k} \cdots s_{-1}}) < \gamma^{k-1}.$$

证明 证(1) 称序列 $s_0, s_1, \cdots, s_k$ 中的元素的个数 $n = k+1$ 为该序列的长度.施归纳于长度 n.当 $k=1$,即 $n=2$ 时,由(3.6.1)和 H2,知

$$U_{s_0 s_1} = \varphi^{-1}(V_{s_0} \cap U_{s_1}) = U_{s_0} \cap \varphi^{-1}(U_{s_1})$$

是含于 U_{s_0}内的水平条.下设 $n \leqslant k$ 时,结论成立.于是,当 $n = k+1$ 时,

$$U_{s_0 s_1 \cdots s_k} = \varphi^{-1}(V_{s_0} \cap U_{s_1 \cdots s_k}) = U_{s_0 \cdots s_{k-1}} \cap \varphi^{-k}(U_{s_k})$$

是含于 $U_{s_0 \cdots s_{k-1}}$内的水平条.

类似可证 $V s_{-k} \cdots s_{-1}$的情况.

由(3.6.1)和(3.6.2),结论(2)显然成立.利用 H2 施归纳于长度 n,可知结论(3)成立. □

对于 $s = (\cdots s_{-2} s_{-1}; s_0 s_1 \cdots) \in \Sigma(N)$,记

$$U(s) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \varphi^{-j}(U_{s_j}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} U_{s_0 s_1 \cdots s_k} \left(= \bigcap_{k=1}^{\infty} U_{s_0 s_1 \cdots s_k} \right), \tag{3.6.3}$$

$$V(s) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \varphi^{j-1}(V_{s_{-j}}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_{s_{-k} \cdots s_{-1}} \left(= \bigcap_{k=2}^{\infty} V_{s_{-k} \cdots s_{-1}} \right). \tag{3.6.4}$$

又设$(\Sigma(N), \sigma)$是双边符号动力系统.记

$$\Delta = \bigcup_{s \in \Sigma(N)} (U(s) \cap V(s)). \tag{3.6.5}$$

引理 3.6.5 设同胚 $\varphi: Q \to \varphi(Q)$满足 H1 和 H2, $s \in \Sigma(N)$则

(1) $\varphi(U(s) \cap V(s)) = U(\sigma(s)) \cap V(\sigma(s))$.

(2) $\mathrm{Card}(U(s) \cap V(s)) = 1$.

证明 证(1).由(3.6.3)和引理 3.6.4 的结论(2),有

$$\varphi(U(s)) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \varphi(U_{s_0 s_1 \cdots s_k}) = V_{s_0} \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} U_{s_1 \cdots s_k} \right) = V_{s_0} \cap U(\sigma(s)),$$

再由(3.6.4),类似可证

$$\varphi(V(s)) \cap V_{s_0} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \varphi(V_{s_{-k} \cdots s_{-1}}) \cap V_{s_0} = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_{s_{-k} \cdots s_{-1} s_0} = V(\sigma(s)).$$

从而

$$\varphi(U(s) \cap V(s)) = \varphi(U(s)) \cap \varphi(V(s))$$

$$= U(\sigma(s)) \cap V_{s_0} \cap \varphi(V(s)) = U(\sigma(s)) \cap V(\sigma(s))$$

成立.

证(2) 由引理 3.6.4 的结论(1),有水平条序列

$$U_{s_0} \supset U_{s_0 s_1} \supset \cdots \supset U_{s_0 s_1 \cdots s_k} \supset \cdots$$

且对任意 k,又有

$$\theta(U_{s_0 s_1 \cdots s_k}) < \gamma^k \to 0, \quad k \to +\infty,$$

据引理 3.6.1,

$$U(s) = \bigcap_{k=0}^{\infty} U_{s_0 s_1 \cdots s_k}$$

是一条水平曲线.类似可证 $V(s)$是一条垂直曲线.再据引理 3.6.2,水平曲线 $U(s)$与垂直曲线 $V(s)$相交于唯一的一点,从而结论(2)成立. □

定理 3.6.1 设同胚 $\varphi: Q \to \varphi(Q)$具条件 H1 和 H2,则 Δ 是 φ 的紧致不变集,且 $\varphi|\Delta$ 拓扑共轭于双边符号动力系统$(\Sigma(N), \sigma)$.

证明 由 Δ 的定义易见 Δ 是 φ 的不变集.

将单点集 $U(s) \cap V(s)$等同于它所包含的唯一点,定义 $h: \Sigma(N) \to \Delta$ 为

$$h(s) = U(s) \cap V(s), \quad \forall s \in \Sigma(N).$$

再按引理 3.6.5 的结论(1),有

$$\varphi|_\Delta \circ h = h \circ \sigma$$

在 $\Sigma(N)$上成立.下证 h 是一个同胚.

首先,设 $s, t \in \Sigma(N)$且 $s \neq t$,即存在 $k \in \mathbf{Z}$ 使 $s_k \neq t_k$,不妨设 $k \geqslant 0$(类似可处理 $k < 0$ 的情况),于是

$$\varphi^k \circ h(s) = h \circ \sigma^k(s) = U(\sigma^k(s)) \cap V(\sigma^k(s)) \subset U_{s_k},$$

并且

$$\varphi^k \circ h(t) \subset U_{s_t}.$$

而

$$U_{s_k} \cap U_{s_t} = \varnothing,$$

故

$$\varphi^k \circ h(s) \neq \varphi^k \circ h(t).$$

由于 φ 是同胚,故

$$h(s) \neq h(t), \quad \forall s \neq t,$$

即 h 是单射.显然 $h: \Sigma(N) \to \Delta$ 是满射,从而是双射.

其次,设 $s, t \in \Sigma(N)$满足

$$d(s, t) < \frac{1}{2^k},$$

于是

$$s_j = t_j, \quad j = 0, \pm 1, \cdots, \pm k,$$

从而

$$h(s), h(t) \in U_{s_0 \cdots s_k} \cap V_{s_{-k} \cdots s_{-1}}.$$

$h(p)$是水平曲线 $U(p)$与垂直曲线 $V(p)$的唯一交点，$p \in \{s, t\}$. 由引理3.6.3和引理3.6.4,有

$$\| h(s) - h(t) \| \leqslant \frac{1}{1-\mu} \max\{\theta(U_{s_0 \cdots s_k}), \theta(V_{s_{-k} \cdots s_{-1}})\} \leqslant \frac{\gamma^{k-1}}{1-\mu}$$

成立,其中$0<\gamma<1$故 $h:\Sigma(N) \to \Delta$ 连续.

$h:\Sigma(N) \to \Delta$ 是从紧致空间$\Sigma(N)$到度量空间 $\Delta \subset \mathbf{R}^2$ 的连续双射,从而是同胚映射[52].同时,Δ 是φ 的紧致不变集. □

推论 3.6.1 Δ 是φ 的N 转移不变集,从而同胚于康托尔三分集.

证明 由定理3.6.1和命题3.1.5直接可得. □

令 $N=2$,则得到著名的 Smale 马蹄模型.

将平面上的正方形 Q 在水平方向上按压缩比$<\frac{1}{2}$压缩,再沿垂直方向按拉伸比>2 拉长,做成一个垂直的窄长条,然后弯成马蹄形回放到 Q 上.

用这样方式定义映射 $\varphi: Q \to \mathbf{R}^2$.记

$$V = \varphi(Q) \cap Q = V_0 \cup V_1,$$

由两个不相交的竖条 V_0 和 V_1 组成,且每一竖条的宽度小于 Q 的宽度的一半,即

$$\theta(V_0), \theta(V_1) < 1.$$

同时,记

$$U = \varphi^{-1}(V),$$

由两个不相交的水平条

$$U_j = \varphi^{-1}(V_j), \quad j = 0,1$$

组成,即

$$U = U_0 \cup U_1,$$

且每一水平条的宽度小于 Q 的宽度的一半,即

$$\theta(U_0), \theta(U_1) < 1.$$

以下记

$$U_{ij} = \varphi^{-1}(V_i \cap U_j) = U_i \cap \varphi^{-1}(U_j), \quad i,j = 0,1;$$

$$V_{ij} = \varphi(U_i \cap V_j) = V_i \cap \varphi(V_j), \quad i,j = 0,1.$$

显然

$$\theta(U_{ij}) < \frac{1}{2}\theta(U_i) < \frac{1}{2},$$

$$\theta(V_{ij}) < \frac{1}{2}\theta(V_i) < \frac{1}{2}.$$

一般地,采有(3.6.1)至(3.6.5)的记号,其中 $N=2$.类似可证

$$\theta(U_{s_0\cdots s_k}) < \frac{1}{2}\theta(U_{s_1\cdots s_k}) < \frac{1}{2^k}$$

$$\theta(V_{s_{-k}\cdots s_{-1}}) < \frac{1}{2}\theta(V_{s_{-k}\cdots s_{-2}}) < \frac{1}{2^{k-1}}$$

再引入记号

$$\Lambda = \bigcup_{s\in\Sigma(2)}(U(s)\cap V(s)).$$

同样,把单点集 $U(s)\cap V(s)$ 与它所含的唯一点等同,定义 $h:\Sigma(2)\to\Lambda$ 为

$$h(s) = U(s)\cap V(s),\quad \forall s\in\Sigma(2).$$

于是有如下定理

定理 3.6.2 (Smale)　Λ 是 φ 的紧致不变集,且 $\varphi|_\Lambda$ 拓扑共轭于双边符号动力系统 $(\Sigma(2),\sigma)$.

这说明,当 φ 限制在 Λ 上时,其动力学性状与移位自同构 σ 在 $\Sigma(2)$ 上的相同.

第四章 分形动力系统

分形几何,由 B. B. Mandelbroat[53]创立于 20 世纪 80 年代初,并首次使用“fractal”一词以称谓“分形”. 本章,主要讨论分形空间上的迭代动力系统、分形吸引子、以及漂移动力系统的混沌性质[54~57].

§4.1 迭代动力系统

设(X,ρ)是完备的度量空间,ρ 是 X 上的距离. 用 $\mathscr{F}(X)$表示 X 中所有紧子集组成的集合. 对 $B\in\mathscr{F}(X)$, $x\in X$, 称

$$\rho(x,B)=\min\{\rho(x,p)\mid p\in B\}$$

为 X 中点 x 到 B 的距离;这时, $\rho(x,B)$是存在的. 对 $\delta>0$, 又称

$$B_\delta=\{x\in X\mid\rho(x,B)\leqslant\delta\}$$

为B的δ-平行体;显然B_δ是包含B的距离小于δ的有界闭集. 如果A, $B\in\mathscr{F}(X)$, 可核验

$$h_\rho(A,B)=\inf\{\delta\mid A\subset B_\delta, B\subset A_\delta\}$$

满足度量的定义,称为集 A 与 B 之间的 Hausdorff 距离. 于是, $(\mathscr{F}(X),h_\rho)$构成一个度量空间. 称集列$\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}}$在 $\mathscr{F}(X)$收敛于 $B\in\mathscr{F}(X)$, 若

$$h_\rho(B_n,B)\to 0\quad(n\to+\infty),$$

记为

$$\lim_{n\to\infty}B_n=B.$$

设自然数 $N>1$, 对给出的 N 个映射

$$w_k:X\to X,\quad k=1,2,\cdots,N,$$

记

$$\mathbf{W}=\{w_1,w_2,\cdots,w_N\}.$$

由此可导出一个 $\mathscr{F}(X)$上的映射

$$\mathbf{W}(A)=\bigcup_{k=1}^{N}w_k(A),\quad\forall A\in\mathscr{F}(X),$$

称为 $\mathscr{F}(X)$上的集射. 特别,当 $w_k(k=1,2,\cdots,N)$是压缩映射时,有

$$w_k:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(X).$$

事实上,压缩映射是连续映射,可映 X 中的紧集为紧集. 于是

$$\mathbf{W}:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(X).$$

从而

$$W^n:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(X),\quad n=0,1,2,\cdots$$

有定义,即构成迭代动力系统$(\mathscr{F}(X), W)$,有的文献又称为双曲迭代函数系(Hyperbolic Iterated Function System).

定义 4.1.1 设 $w_k:X\to X$ 是压缩比为 $c_k(k=1,2,\cdots,N)$的压缩映射,则集射 $W=\{w_1,\cdots,w_N\}$为$\mathscr{F}(X)$上的双曲迭代函数系,简称为迭代函数系(IFS),记为$(\mathscr{F}(X), W)$;而称

$$c=\max\{c_1,c_2,\cdots,c_N\}$$

为此 IFS 的压缩比.

下称 W 在$\mathscr{F}(X)$中的不动点 A 为不变集.

定义 4.1.2 集合 $A\in\mathscr{F}(X)$称为集射 $W:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(X)$的吸引子,若 A 是 W 的不变集且

$$A=\lim_{n\to+\infty}W^n(B),\quad \forall B\in\mathscr{F}(X).$$

在§4.2 中,将证明 IFS 存在唯一的吸引子.

例 4.1.1 定义于度量空间$(\mathbf{R},\rho_E)$上的

$$w_1(x)=\frac{1}{3}x,$$

$$w_2(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3},$$

其中 ρ_E 表示 Euclid 距离.记 $W=\{w_1,w_2\}$,则$\{\mathbf{R},W\}$是压缩比为$\frac{1}{3}$的 IFS.取 $E_0=[0,1]$,令 $E_n=W^n(E_0)$, $n\in\mathbf{N}$,则

$$E_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right],$$

$$E_2=\left[0,\frac{1}{3^2}\right]\cup\left[\frac{2}{3^2},\frac{3}{3^2}\right]\cup\left[\frac{6}{3^2},\frac{7}{3^2}\right]\cup\left[\frac{8}{3^2},1\right],$$

$$\cdots$$

$$E_n=\left[0,\frac{1}{3^n}\right]\cup\left[\frac{2}{3^n},\frac{3}{3^n}\right]\cup\cdots\cup\left[\frac{3^n-3}{3^n},\frac{3^n-2}{3^n}\right]\cup\left[\frac{3^n-1}{3^n},1\right]$$

是 2^n 个小区间的并.由定理 4.2.3 知 W 存在唯一的吸引子,即康托尔三分集,它是一个疏朗完全集[34].

例 4.1.1 给出的 w_1 和 w_2 是 $\mathbf{R}$ 上的仿射变换,下例讨论 $\mathbf{R}^2$ 上的一类重要的仿射变换.称数据集

$$\mathscr{D}=\{(x_j,y_j)\mid j=0,1,\cdots,N\}$$

为插值数据集,其中 $x_0<x_1<\cdots<x_N$.

例 4.1.2 设自然数 $N>1$.仿射变换 $w_k:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 定义为

$$w_k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_k & 0\\c_k & d_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e_k\\f_k\end{pmatrix},\quad k=1,\cdots,N.$$

且满足端点连接条件

$$w_k\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{k-1}\\y_{k-1}\end{pmatrix},\quad w_k\begin{pmatrix}x_N\\y_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_k\\y_k\end{pmatrix},\quad k=1,\cdots,N,$$

其中$\{(x_j,y_j)\mid j=0,1,\cdots,N\}$是插值数据集.由端点连接条件,有

$$a_k=\frac{x_k-x_{k-1}}{x_N-x_0},$$

$$c_k=\frac{y_k-y_{k-1}}{x_N-x_0}-\frac{d_k(y_N-y_0)}{x_N-x_0},$$

$$e_k=\frac{x_Nx_{k-1}-x_kx_0}{x_N-x_0},$$

$$f_k=\frac{x_Ny_{k-1}-x_0y_k}{x_N-x_0}-\frac{d_k(y_0x_N-x_0y_N)}{x_N-x_0},$$

其中 d_k 为参数,称为垂直比例因子.

仿射变换 w_k 在x 轴方向上将区间$[x_0,x_N]$压缩至$[x_{k-1},x_k]$,即 $a_kx+e_k\in[x_{k-1},x_k]$, $\forall\, x\in[x_0,x_N]$;而在 y 轴方向上,将垂直于 x 轴的线段$L=(x^*,y)\mid y'\leqslant y\leqslant y''\}$映射为垂直于 x 轴的线段 $w_k(L)=\{(a_kx^*+e_k,c_kx^*+d_ky+f_k)\mid y'\leqslant y\leqslant y''\}$.线段 $w_k(L)$之长与线段 L 之长的比为$|d_k|$,故称 d_k 为垂直比例因子.

作为迭代动力系统的应用,利用仿射变换集射 $W=\{w_1,\cdots,w_N\}$,可以在平面上构造出许多分形图形,即 W 的吸引子,也可定义分形插值函数.

设 $f:[x_0,x_N]\to\mathbf{R}$ 是连续函数,称

$$G=\{(x,f(x))\mid x\in[x_0,x_N]\}$$

为函数 f 在区间$[x_0,x_N]$上的图像.由于 f 是连续函数,故 G 是 $\mathbf{R}^2$内的有界闭集,从而 $G\in\mathscr{F}(\mathbf{R}^2)$. $W=\{w_1,\cdots,w_N\}$是插值数据集 $\mathscr{D}$ 上按例 4.1.1 定义的集射.若连续函数 $f(x)$在$[x_0,x_N]$上的图像 G 是 W 的吸引子且满足插值条件

$$f(x_j)=y_j,\quad j=0,1,\cdots,N,$$

则称 $f(x)$是该插值数据集上的分形插值函数,同时称 G 是分形插值图像.

例 4.1.2 定义的仿射变换 k 在x 轴方向上是压缩的,当$0\leqslant d<1$时,在 y 轴方向上也是压缩的,但一般不能期望 w_k 在欧氏度量下也是压缩的.

命题 4.1.1 设 $N>1$, $0\leqslant|d_k|<1$,仿射变换如例 4.1.2 所定义,则存在 $\mathbf{R}^2$ 上的度量 ρ 使得在度量空间$(\mathbf{R}^2,\rho)$上,$w_k(k=1,2,\cdots,N)$是压缩的.

证明 由于$|a_k|<1$, $0\leqslant|d_k|<1$, $k=1,\cdots,N$.取

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\max\{|a_k| \mid k = 1, \cdots, N\},$$

$$\beta = \max\{|d_k| \mid k = 1, \cdots, N\},$$

显然 $\max\{|a_k| \mid k=1,\cdots,N\}<\alpha<1, 0\leqslant\beta<1$, 又取

$$\theta = \begin{cases} 1, & 如果\ c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0, \\ \dfrac{\min\{1-|a_k| \mid k = 1, \cdots, N\}}{\max\{2|c_k| \mid k = 1, \cdots, N\}}, & 否则, \end{cases}$$

对 $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in \mathbf{R}^2$, 定义

$$\rho((s_1, t_1), (s_2, t_2)) = |s_1 - s_2| + \theta|t_1 - t_2|,$$

易核验, 所定义的 ρ 是 $\mathbf{R}^2$ 上满足要求的一个度量. □

由命题 4.1.1 和 § 4.2 证明的定理 4.2.3 立即可得下列命题.

命题 4.1.2 在命题 4.1.1 的条件下, 集射 $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_N\}: \mathscr{F}(\mathbf{R}^2) \to \mathscr{F}(\mathbf{R}^2)$ 在度量空间 $(\mathscr{F}(\mathbf{R}^2), h_\rho)$ 上存在唯一的吸引子. □

命题 4.1.3 设插值数据集为 $\mathscr{D}$, 在命题 4.1.1 的条件下, 存在唯一的连续函数 $f: [x_0, x_N] \to \mathbf{R}$ 是该数据集上的分形插值函数.

证明 记 $C[x_0, x_N]$ 为闭区间 $[x_0, x_N]$ 上全体连续函数赋以范数

$$\| f \| = \max\{|f(x)| \mid x \in [x_0, x_N]\}, \quad \forall f \in C[x_0, x_N]$$

而成的 Banach 空间, 并记 $C^*[x_0, x_N]$ 为

$$C^*[x_0, x_N] = \{f \in C[x_0, x_N] \mid f(x_0) = y_0, f(x_N) = y_N\},$$

显然 $C^*[x_0, x_N]$ 是 $C[x_0, x_N]$ 的完备子空间.

a_k, c_k, e_k, f_k 的定义同前. 对任一 $f \in C^*[x_0, x_N]$, 定义映射 T 为

$$(Tf)(x) = c_k l_k^{-1}(x) + d_k f(l_k^{-1}(x)) + f_k,$$

其中 $x \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \cdots, N$, 且 $l_k(x) = a_k x + e_k, x \in [x_0, x_N]$, 显然 $l_k^{-1}(x)$ 存在. 则 $T: C^*[x_0, x_N] \to C^*[x_0, x_N]$ 且是压缩的. 事实上,

$$(Tf)(x_0) = y_0, \quad (Tf)(x_N) = y_N.$$

同时 Tf 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上连续, 并且

$$\lim_{x \to x_k^+} (Tf)(x) = c_{k+1} x_0 + d_{k+1} f(x_0) + f_{k+1} = y_k,$$

$$\lim_{x \to x_k^-} (Tf)(x) = c_k x_N + d_k f(x_N) + f_k = y_k,$$

故 $T: C^*[x_0, x_N] \to C^*[x_0, x_N]$. 再由 $|d_k| < 1$ 有

$$\begin{aligned} \| Tf - Tg \| &= \max\{|Tf(x) - Tg(x)| \mid x \in [x_0, x_N]\} \\ &\leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant N}\{|d_k|\} \cdot \max_{1\leqslant k\leqslant N}\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [x_0, x_N]\} \\ &\leqslant \beta \| f - g \|, \quad \forall f, g \in C^*[x_0, x_N], \end{aligned}$$

其中$\beta=\max\{|d_k||k=1,\cdots,N\}<1$，知$T$是压缩的.故存在唯一的$f\in C^*[a,b]$使

$$Tf=f.$$

f还满足插值条件.事实上，对任一$1\leqslant k\leqslant N$，在$[x_{k-1},x_k]$上，有

$$\begin{aligned}(Tf)(x_k)&=c_kl_k^{-1}(x_k)+d_kf(l_k^{-1}(x_k))+f_k\\&=c_kx_N+d_kf(x_N)+f_k\\&=y_N,\end{aligned}$$

类似可证

$$(Tf)(x_0)=y_0.$$

又设G是f在上$[x_0,x_N]$的图像，由命题4.1.2，只须证G是W的不动点，即知G是W唯一的吸引子，从而$f(x)$是该数据集上唯一的分形插值函数.

首先，任取$(x,f(x))\in G$，由$x\in[x_0,x_N]$，存在$n\in\{1,2,\cdots,N\}$使$x\in[x_{n-1},x_n]$，故存在$x'\in[x_0,x_N]$使

$$l(x')=x,\qquad (x',f(x'))\in G;$$

再由

$$\begin{aligned}\omega_n\begin{pmatrix}x'\\f(x')\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}a_nx'+e_n\\c_nx'+d_nf(x')+f_n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}x\\c_nl_n^{-1}(x)+d_nf(l_n^{-1}(x))+f_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

知$(x,f(x))\in w_n(G)$，即

$$G\subset\bigcup_{k=1}^N w_k(G).$$

其次，设$(x,y)\in w_n(G)$，则存在$(x',f(x'))\in G$，使

$$\boldsymbol{W}_n\begin{pmatrix}x'\\f(x')\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

即$x=l_n(x')\in[x_{n-1},x_n]$，且

$$y=c_nx'+d_nf(x')+f_n=(Tf)(x)=f(x),$$

知$(x,y)=(x,f(x))\in G$，即

$$G\supset\bigcup_{k=1}^N w_k(G).$$

联合前证，G是W的不动点，从而是W唯一的吸引子. □

下面讨论迭代动力系统的稳定性.

定理 4.1.1（拼贴定理） 设$A\in\mathscr{F}(X)$是完备度量空间(X,ρ)上双曲IFS$\{X,\boldsymbol{W}\}$的吸引子，$\boldsymbol{W}=\{w_1,\cdots,w_N\}$，则

$$h_\rho(B,A) = \frac{1}{1-c}h_\rho(B,W(B)), \quad \forall B \in \mathscr{F}(X).$$

其中$0 \leqslant c < 1$是W的压缩比.

证明　存在自然数$1 \leqslant k \leqslant N$和实数$\delta > 0$,有

$$h_\rho(P_n,Q_n) \leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant N} h_\rho(P_n,Q_n) = h_\rho(P_k,Q_k) = \delta, \quad n = 1,\cdots,N,$$

其中$P_n, Q_n \in \mathscr{F}(X)$,于是

$$P_n \subseteq (Q_n)_\delta, \quad Q_n \subseteq (P_n)_\delta, \quad n = 1,\cdots,N,$$

可以证明

$$\bigcup_{n=1}^N P_n \subseteq \bigcup_{n=1}^N (Q_n)_\delta = \left(\bigcup_{n=1}^N Q_n\right)_\delta,$$

$$\bigcup_{n=1}^N Q_n \subseteq \bigcup_{n=1}^N (P_n)_\delta = \left(\bigcup_{n=1}^N P_n\right)_\delta,$$

即

$$h_\rho\left(\bigcup_{n=1}^N P_n, \bigcup_{n=1}^N Q_n\right) \leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant N} h_\rho(P_n,Q_n).$$

利用上式,可以证明

$$\begin{aligned} h_\rho(W(B),A) &= h_\rho\left(\bigcup_{n=1}^N w_n(B), \bigcup_{n=1}^N w_n(A)\right) \\ &\leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant N} h_\rho(w_n(B), w_n(A)) \\ &\leqslant \max_{1 \leqslant n \leqslant N} c_n h_\rho(B,A) \\ &= c h_\rho(B,A). \end{aligned}$$

其中$0 \leqslant c = \max\{c_n \mid 1 \leqslant n \leqslant N\} < 1$是$W$的压缩比.于是

$$\begin{aligned} h_\rho(B,A) &\leqslant h_\rho(B,W(B)) + h_\rho(W(B),A) \\ &\leqslant h_\rho(B,W(B)) + c h_\rho(B,A), \end{aligned}$$

可知结论成立.　□

推论 4.1.1　对任意$B \in \mathscr{F}(X)$, $W^n(B)$对吸引子A有逼近估计

$$h_\rho(W^n(B),A) \leqslant \frac{1}{1-c}h_\rho(W^n(B), W^{n+1}(B)).$$

证明　利用定理 4.1.1 立即可得.　□

引理 4.1.1　设(P,ρ_P),(X,ρ)是度量空间,且X是完备的,若映射$w: P \times X \to X$满足

(1)对任意$p \in P$, $w(p,\cdot) = w_p(\cdot): X \to X$是压缩比为$0 \leqslant c < 1$的压缩映射.

(2)对任意给定的$x \in X$, $w(\cdot,x): P \to X$是连续映射.

则w的不动点$x(p)$所确定的映射$x(\cdot): P \to X$是连续的.

证明　设$x(p)$是$p \in P$所对应的不动点.由条件(2),对任给的$\varepsilon > 0$,存

在 $\delta>0$,当 $q\in\{q\in P|\rho_P(p,q)<\delta\}$时,有

$$\rho(w(p,x(p)),w(q,x(p)))<(1-c)\varepsilon.$$

再由条件(1),有

$$\begin{aligned}\rho(x(p),x(q))&=\rho(w_p(x(p)),w_q(x(q)))\\&\leqslant\rho(w_p(x(p)),w_qx(p))+\rho(w_q(x(p)),w_q(x(q)))\\&\leqslant\rho(w_p(x(p)),w_q(x(p)))+c\rho(x(p),x(q)).\end{aligned}$$

联合前式得

$$0\leqslant\rho(x(p),x(q))\leqslant\frac{1}{1-c}\rho(w_p(x(p)),w_q(x(p)))<\varepsilon,$$

故 $x(p)$在 P 上是连续的. □

引理 4.1.2 设 $A,B,C,D\in\mathscr{F}(X)$,则

$$h_\rho(A\cup B,C\cup D)\leqslant\sup(h_\rho(A,C),h_\rho(B,D)).$$

证明 对任意实数 $\delta>\sup(h_\rho(A,C),h_\rho(B,D))$,有

$$A\subset C_\delta,C\subset A_\delta,B\subset D_\delta,D\subset B_\delta,$$

故

$$A\cup B\subset C_\delta\cup D_\delta=(C\cup D)_\delta,$$
$$C\cup D\subset A_\delta\cup B_\delta=(A\cup B)_\delta,$$

即

$$h_\rho(A\cup B,C\cup D)\leqslant\delta.$$

由 δ 任意性知结论成立. □

定理 4.1.2 (对参数的连续依赖性) 设(P,ρ_P)、(X,ρ)是度量空间且 X 是完备的,若映射 $w_n:P\times X\to X$, $n=1,\cdots,N$,满足

(1)对任意 $p\in P$, $w_n(p,\cdot):X\to X$,是压缩比 $0\leqslant c_n<1$ 与 p 无关的压缩映射;记 $c=\max\{c_1,\cdots,c_N\}$.

(2)对任意 $x\in X$,映射 $w_n(\cdot,x):P\to X$ 连续.

则集射 $W:P\times\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(X)$的不动点 $A(p)\in\mathscr{F}(X)$所定义的映射

$$A:p\mapsto A(p),\quad\forall p\in P$$

是连续映射.

证明 记 $p,q\in P$ 所对应的不动点分别为$A(p)$和 $A(q)$;由

$$\begin{aligned}&h_\rho(A(p),A(q))=h_\rho(W(p,A(p)),W(q,A(q)))\\&\leqslant h_\rho(W(p,A(p)),W(q,A(p)))+h_\rho(W(q,A(p)),W(q,A(q)))\\&\leqslant h_\rho(W(p,A(p)),W(q,A(p)))+ch_\rho(A(p),A(q)),\end{aligned}$$

有

$$h_\rho(A(p),A(q))\leqslant\frac{1}{1-c}h_\rho(W(p,A(p)),W(q,A(p))).\tag{4.1.1}$$

任给 $\varepsilon>0$, 取 $\alpha=\varepsilon/(1+2c)$.

首先, 设 $N=1$. 由于 $A(p)$是紧集, 故存在有限开覆盖

$$O_\alpha(\overline{x_j})=\{x\in X\mid\rho(x,\overline{x_j})<\alpha\},\quad j=1,\cdots,l,$$

且 $\overline{x_j}\in A(p),j=1,\cdots,l$. 由于 $\overline{x_j}$ 是有限个, 故存在与 $\overline{x_j}$ 无关的 $\delta>0$, 由条件(2), 当 $\rho_P(p,q)<\delta$ 时, 有

$$\rho(w_1(p,\overline{x}),w_1(q,\overline{x}))<\alpha,\quad \overline{x}\in\{\overline{x_1},\cdots,\overline{x_l}\}.$$

任取 $z\in w_1(p,A(p))$, 则存在 $\overline{x}\in\{\overline{x_1},\cdots,\overline{x_l}\}$ 及 $x\in A(p)\cap O_\alpha(\overline{x})$, 使 $z=w_1(p,x)$, 且由上式得

$$\begin{aligned}\rho(z,w_1(q,A(p)))&=\rho(w_1(p,x),w_1(q,A(p)))\\&\leqslant\rho(w_1(p,x),w_1(q,x))\\&\leqslant\rho(w_1(p,x),w_1(p,\overline{x}))+\rho(w_1(p,\overline{x})),\\&\quad w_1(q,\overline{x})+\rho(w_1(q,\overline{x}),w_1(q,x))\\&\leqslant 2c\rho(x,\overline{x})+\rho(w_1(p,\overline{x}),w_1(q,\overline{x}))\\&<(2c+1)\alpha=\varepsilon,\end{aligned}$$

即

$$w_1(p,A(p))\subseteq w_1(q,A(p))_\varepsilon.$$

类似可证

$$w_1(q,A(p))\subseteq w_1(p,A(p))_\varepsilon,$$

故

$$h_\rho(w_1(p,A(p)),w_1(q,A(p)))<\varepsilon.$$

联合(4.1.1), 当 $N=1$ 时存在 $\delta>0$ 当 $\rho_P(p,q)<\delta$ 时有

$$h_\rho(A(p),A(q))<\varepsilon/(1-c)$$

成立. 再根据引理 4.1.2, 施归纳于 N, 可证定理结论成立. □

§4.2　分形空间

(X,ρ)是完备的度量空间, h_ρ 是通过 ρ 定义的 Hausdorff 距离, $(\mathscr{F}(X),h_\rho)$是 X 上全体紧子集按距离 h_ρ 定义的度量空间, 这里称为分形空间.

首先讨论分形空间$(\mathscr{F}(X),h_\rho)$的完备性.

引理 4.2.1 (扩张定理)　设(X,ρ)是度量空间, 而$\{A_n\}_{n=1}^\infty$是$(\mathscr{F}(X),h_\rho)$中的 Cauchy 列, 若存在单调上升的整数列 $0<n_1<n_2<\cdots$, 使$\{x_{n_j}\mid x_{n_j}\in A_{n_j},j=1,2,\cdots\}$是 X 中的一个 Cauchy 列, 则存在一个 X 中的 Cauchy 点列 $\{\tilde{x}_n\mid\tilde{x}_n\in A_n,n=1,2,\cdots\}$使 $\tilde{x}_{n_j}=x_{n_j},j=1,2,\cdots$.

证明 首先,构造点列$\{\tilde{x}_n|n=1,2,\cdots\}$.由$A_n\in\mathscr{F}(X)$,对$\forall\, n\in\{1,2,\cdots,n_1\}$可取

$$\tilde{x}_n\in\{x\in A_n|\rho(x,x_{n_1})=\rho(x_{n_1},A_n)\},\quad n=1,2,\cdots,n_1,$$

显然满足条件$\tilde{x}_{n_1}=x_{n_1}$.如此构造下去,对$j=1,2,\cdots$,取

$$\tilde{x}_n\in\{x\in A_n|\rho(x,x_{n_{j+1}})=\rho(x_{n_{j+1}},A_n)\},\quad n=n_j+1,n_j+2,\cdots,n_{j+1}.$$

显然

$$\tilde{x}_{n_j}=x_{n_j},\quad j=1,2,\cdots$$

下面,再证$\{\tilde{x}_n\in A_n|n=1,2,\cdots\}$是$X$中的Cauchy列.任给$\varepsilon>0$,由定理所给条件,存在$N$,有

$$\rho(x_{n_j},x_{n_k})<\frac{\varepsilon}{3},\quad\forall\, n_j,n_k>N,$$

$$h_\rho(A_n,A_m)<\frac{\varepsilon}{3},\quad\forall\, n,m>N,\tag{4.2.1}$$

其中,$m\in\{n_{j-1}+1,\cdots,n_j\}$, $n\in\{n_{k-1}+1,\cdots,n_k\}$.由此可证

$$\rho(\tilde{x}_m,x_{n_j})<\frac{\varepsilon}{3},\quad\forall\, m,n_j>N.\tag{4.2.2}$$

事实上,将(4.2.1)式中的n换成n_j有

$$h_\rho(A_{n_j},A_m)=\inf\{\delta|A_{n_j}\subset(A_m)_\delta,A_m\subset(A_{n_j})_\delta\}<\frac{\varepsilon}{3},$$

而$x_{n_j}\in A_{n_j}$,有$\rho(x_{n_j},A_m)<\frac{\varepsilon}{3}$.再由$\tilde{x}_m$的定义$\rho(\tilde{x}_m,x_{n_j})=\rho(x_{n_j},A_m)$,知(4.2.2)式成立.

类似可证

$$\rho(x_{n_k},\tilde{x}_n)<\frac{\varepsilon}{3},\quad\forall\, n_k,n>N.$$

联合上述诸式,知

$$\rho(\tilde{x}_m,\tilde{x}_n)\leqslant\rho(\tilde{x}_m,x_{n_j})+\rho(x_{n_j},x_{n_k})+\rho(x_{n_k},\tilde{x}_n)<\varepsilon$$

对一切充分大的m和n成立.故所选点列是Cauchy列. □

定理 4.2.1 (完备性定理) 若(X,ρ)是完备的度量空间,则分形空间$(\mathscr{F}(X),h_\rho)$也是完备的度量空间,即是:若$\{A_n\in\mathscr{F}(X)\}_{n=1}^\infty$是$\mathscr{F}(X)$中的Cauchy列,则存在$A\in\mathscr{F}(X)$使$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$,其中

$$A=\{x\in X|\exists\{x_n\in A_n\}_{n=1}^\infty\text{ 使 }x_n\to x,n\to\infty\}.\tag{4.2.3}$$

证明 step1 证$A\neq\varnothing$.设$\{A_n|n=1,2,\cdots\}$是$\mathscr{F}(X)$中的Cauchy列,则存在$N_1<N_2<\cdots$使

$$h_\rho(A_n,A_m)<2^{-j},\quad\forall\, n,m\geqslant N_j,\tag{4.2.4}$$

首先,按如下方法构造$\{x_{N_j}\in A_{N_j}\}$使

$$\rho(x_{N_j},x_{N_{j+1}})\leqslant 2^{-j}. \tag{4.2.5}$$

设$j=1$,取$x_{N_1}\in A_{N_1}$,由(4.2.4)式可取$x_{N_2}\in A_{N_2}$使

$$\rho(x_{N_1},x_{N_2})\leqslant 2^{-1}.$$

若已选出$x_{N_1},x_{N_2},\cdots,x_{N_k}$使

$$\rho(x_{N_{i-1}},x_{N_i})\leqslant 2^{-(i-1)},\quad i=2,\cdots,k,$$

再由(4.2.4)式的$h_\rho(A_{N_k},A_{N_{k+1}})<2^{-k}$,故可取$x_{N_{k+1}}\in A_{N_{k+1}}$使

$$\rho(x_{N_k},x_{N_{k+1}})\leqslant 2^{-k},$$

即存在$\{x_{N_j}\in A_{N_j}\}$使(4.2.5)式成立.

其次,任给$\varepsilon>0$,必存在$N_\varepsilon>0$,使$\sum\limits_{i=N_\varepsilon}^{\infty}2^{-i}<\varepsilon$.于是当$n>m\geqslant N_\varepsilon$时,由(4.2.5)式得

$$\begin{aligned}\rho(x_{N_m},x_{N_n})&\leqslant\rho(x_{N_m},x_{N_{m+1}})+\rho(x_{N_{m+1}},x_{N_{m+2}})+\cdots+\rho(x_{N_{n-1}},x_{N_n})\\&\leqslant\sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty}2^{-i}<\varepsilon,\end{aligned}$$

即$\{x_{N_i}|i=1,2,\cdots\}$是X中的Cauchy列,由引理4.2.1,存在$a_{N_i}=x_{N_i}$的Cauchy列$\{a_n\in A_n|n=1,2,\cdots\}\subset X$,再由$X$的完备性,及集合$A$的定义(4.2.3)式,极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在且属于$A$,故$A\neq\varnothing$.

step2 证$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$,即对任给的$\varepsilon>0$,要证存在$N\in\mathbf{N}$使

$$A\subset(A_n)_\varepsilon\quad\forall n>N, \tag{4.2.6}$$

$$A_n\subset(A)_\varepsilon\quad\forall n>N, \tag{4.2.7}$$

成立.首先证(4.2.6)式.对任一$a\in A$,由(4.2.3),存在$\{a_k\in A_k\}_{k=1}^{\infty}$有

$$\rho(a_m,a)<\varepsilon/2,\quad\exists N\in\mathbf{N},\quad\forall m>N,$$

取该N充分大,同时使$h_\rho(A_m,A_n)<\varepsilon/2,\forall m,n>N$,即有

$$a_m\in A_m\subset(A_n)_{\varepsilon/2},\quad\forall m>n>N.$$

考虑到$(A_n)_\varepsilon$是闭集,故$\{a_m\}$的极限点$a\in(A_n)_\varepsilon$,即(4.2.6)成立.

下证(4.2.7)式.即要证存在N,当$n>N$时有

$$\rho(y,A)=\inf_{x\in A}\rho(y,x)<\varepsilon,\quad\forall y\in A_n.$$

为此,只须证对任一$y\in A_n$存在$x\in A$使$\rho(y,x)<\varepsilon$即可.事实上,记$\varepsilon_j=2^{-j}\varepsilon$,取充分大的$N$,及$N=N_1<N_2<\cdots$使

$$A_m\subset(A_k)_{\varepsilon_{j+1}},\quad\forall m,k\geqslant N_j,$$

并使$n>N$,有$A_n\subset(A_{N_1})_{\varepsilon_1}$.类似于step1中的作法,可选取收敛点列

$\{x_{N_j} | x_{N_j} \in A_{N_j}, j = 1, 2, \cdots\}$使其收敛于 A 中某点 x，并有

$$\rho(y, x_{N_1}) \leqslant \varepsilon_1 \text{ 且 } \rho(x_{N_{j-1}}, x_{N_j}) \leqslant \varepsilon_j,$$

于是 $\rho(y, x_{N_j}) < \varepsilon$. 故 $\rho(y, x) < \varepsilon$，即(4.2.7)成立.

step3 证 $A \in \mathscr{F}(X)$. 由于 X 完备，故只须证 A 是 X 中的有界闭集.

首先，证 A 是 X 中的闭集. 设$\{a_i | i = 1, 2, \cdots\} \subset A$ 且 $a_i \to a\ (i \to \infty)$，下证 $a \in A$. 存在 $N_1 < N_2 < \cdots$ 使

$$\rho(a_{N_i}, a) < i^{-1};$$

另一方面，由 $a_i \in A$，对每个 i 存在$\{x_{i,n} \in A_n\}_{n=1}^{\infty}$使 $x_{i,n} \to a_i\ (n \to \infty)$，特别对 $a_{N_i} \in A$ 有 $m_1 < m_2 < \cdots$ 使

$$\rho(x_{N_i, m_i}, a_{N_i}) < i^{-1},$$

由上两式有

$$\rho(x_{N_i, m_i}, a) \leqslant 2i^{-1}.$$

令 $y_{m_i} = x_{N_i, m_i} \in A_{m_i}$，有 $y_{m_i} \to a\ (i \to \infty)$. 于是由引理 4.2.1，存在收敛点列 $\{b_n \in A_n\}_{n=1}^{\infty}$使 $b_{m_i} = y_{m_i}$，于是 $b_n \to a\ (n \to \infty)$. 由集 A 的定义(4.2.1)式，知 $a \in A$，即 A 是 X 中的闭集.

其次，证 A 是 X 中的有界集. 若其不然，存在 $\varepsilon > 0$ 而 A 不存在有限的 ε 网，即存在$\{x_i \in A\}_{i=1}^{\infty}$使

$$\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon, \quad i \neq j. \tag{4.2.8}$$

另一方面，由(4.2.6)，当 n 充分大时有 $A \subset (A_n)_{\varepsilon/3}$，于是对任一 $x_i \in A$，存在 $y_i \in A_n$ 使 $\rho(x_i, y_i) < \dfrac{\varepsilon}{3}$，$i = 1, 2, \cdots$. 由于 A_n 是紧集，故$\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \subset A_n$ 有收敛子列$\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，故存在 $y_{n_i}, y_{n_j} \in \{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$使 $\rho(y_{n_i}, y_{n_j}) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. 从而

$$\rho(x_{n_i}, x_{n_j}) \leqslant \rho(x_{n_i}, y_{n_i}) + \rho(y_{n_i}, y_{n_j}) + \rho(y_{n_j}, x_{n_j}) < \varepsilon$$

与(4.2.8)式矛盾，故 A 是 X 中的有界集且由前证知，A 是 X 中的紧集. □

下面讨论分形空间$(\mathscr{F}(X), h)$上的压缩映射.

定理 4.2.2 设映射 $w_n: X \to X\ (n = 1, 2, \cdots, N)$是度量空间$(X, \rho)$上压缩比为 c_n 的压缩映射，则集射 $W: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(X)$，

$$W(B) = \bigcup_{k=1}^{N} w_k(B), \quad \forall B \in \mathscr{F}(X)$$

是压缩比为 $c = \max\{c_1, c_2, \cdots, c_N\}$的压缩映射.

证明 首先，可以证明

$$h_\rho(w_n(A), w_n(B)) \leqslant c_n h_\rho(A, B), \quad \forall A, B \in \mathscr{F}(X), n = 1, \cdots, N,$$

事实上，记 $\delta = h_\rho(A, B)$. 对任意 $y_1 \in w_n(A)$，$y_2 \in w_n(B)$，存在 $x_1 \in A$，

$x_2 \in B$ 使 $y_1 = w_n(x_1), y_2 = w_n(x_2)$. 同时, 由 $A \subset (B)_\delta$ 有

$$\rho(x_1, B) = \min\{\rho(x, y) \mid y \in B\} \leqslant \delta, \quad x_1 \in A,$$

于是

$$\begin{aligned}\rho(y_1, w_n(B)) &= \min\{\rho(y_1, y_2) \mid y_2 \in w_n(B)\} \\ &= \min\{\rho(w_n(x_1), w_n(x_2)) \mid x_2 \in B\} \\ &\leqslant c_n \min\{\rho(x_1, x_2) \mid x_2 \in B\} \\ &\leqslant c_n \delta, \quad \forall y_1 \in w_n(A),\end{aligned}$$

即

$$w_n(A) \subseteq (w_n(B))_{c_n\delta}.$$

类似可证

$$w_n(B) \subseteq (w_n(A))_{c_n\delta}.$$

故所证成立.

其次, 仅对 $N=2$ 的情况, 证明定理的结论. 事实上, 由引理 4.1.2, 有

$$\begin{aligned}&h_\rho(W(A), W(B)) \\ &= h_\rho(w_1(A) \cup w_2(A), w_1(B) \cup w_2(B)) \\ &\leqslant \sup(h_\rho(w_1(A), w_1(B)), h_\rho(w_2(A), w_2(B))) \\ &\leqslant \sup(c_1 h_\rho(A, B), c_2 h_\rho(A, B)) \\ &\leqslant c h_\rho(A, B).\end{aligned}$$

用数学归纳法, 可对 N 为有限的情况进行证明, 故定理结论成立. □

由定理 4.2.1 和定理 4.2.2 可直接得到

定理 4.2.3 若 $w_n: X \to X (n = 1, 2, \cdots, N)$ 是完备度量空间 (X, ρ) 上的压缩映射, 则集射 $W: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(X)$ 在 $\mathscr{F}(X)$ 内存在唯一的吸引子.

设 (X, ρ) 是紧致的度量空间, $A, B \in \mathscr{F}(X)$, 置

$$d(A, B) = \sup\{|\rho(x, A) - \rho(x, B)| \mid x \in X\}.$$

由 X 的紧性, $d(A, B)$ 是有限的实数, 显然满足度量公理.

引理 4.2.2 设 (X, ρ) 是紧致的度量空间, 则

$$h_\rho(A, B) = d(A, B), \quad \forall A, B \in \mathscr{F}(X).$$

证明 Hausdorff 距离 h_ρ 可以表示为

$$h_\rho(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A)\}.$$

由于

$$\sup_{a \in A} \rho(a, B) = \sup_{a \in A} |\rho(a, B) - \rho(a, A)| \leqslant d(A, B),$$

同样

$$\sup_{b \in B} \rho(b, A) \leqslant d(A, B),$$

因而

$$h_\rho(A,B)\leqslant d(A,B).$$

另一方面,对任意的 $x\in X,b\in B$,有

$$\begin{aligned}\rho(x,A)-\rho(x,B)&=\rho(x,A)-\inf_{b\in B}\rho(x,b)\\&\leqslant\sup_{b\in B}(\rho(x,A)-\rho(x,b))\\&\leqslant\sup_{b\in B}\rho(b,A);\end{aligned}$$

类似地,有

$$\rho(x,B)-\rho(x,A)\leqslant\sup_{a\in A}\rho(a,B).$$

因而

$$d(A,B)\leqslant h_\rho(A,B),$$

联合前式,有结论成立. □

定理 4.2.4 若(X,ρ)是紧致的度量空间,则$(\mathscr{F}(X),h_\rho)$是紧空间.

证明 置映射

$$g:\mathscr{F}(X)\to C^0(X,\mathbf{R})$$

为

$$g(A):X\to\mathbf{R},x\mapsto\rho(x,A),\quad\forall x\in X.$$

其中 $A\in\mathscr{F}(X)$.即 g 嵌 $\mathscr{F}(X)$入 $C^0(X,\mathbf{R})$,并由引理 4.2.2 有

$$\begin{aligned}\|g(A)-g(B)\|&=\sup\{|g(A)(x)-g(B)(x)|\mid x\in X\}\\&=\sup\{|\rho(x,A)-\rho(x,B)|\mid x\in X\}\\&=h_\rho(A,B),\quad\forall A,B\in\mathscr{F}(X),\end{aligned}$$

即嵌入是等距的.显然 g 是连续的,由 $\mathscr{F}(X)$的完备性,有 $g(\mathscr{F})\subset C^0(X,\mathbf{R})$也是完备的,因而是闭的.再由 X 的紧性,存在常数 $M>0$,有

$$|g(A)(x)|=\rho(x,A)\leqslant M,$$

$$|g(A)(x)-g(A)(y)|\leqslant\rho(x,y),$$

对任意 $A\in\mathscr{F}(X),x,y\in X$ 成立,即 $g(\mathscr{F})$是 $C^0(M,\mathbf{R})$中的一致有界且等度连续的闭子集.由 Arzela-Ascoli 定理[58],知 $g(\mathscr{F})$是 $C^0(M,\mathbf{R})$中的紧集;再由嵌入的等距性知结论成立. □

下面讨论紧空间 X 上拓扑动力系统(X,f)的链回归集,其中 $f\in$ Homeo(X),即 f 是 X 上的同胚.

设实数 $\alpha>0,a,b\in\mathbf{Z},a<b,a$ 可为 $-\infty,b$ 可以为 $+\infty$,称

$$\{x_j\}_{j=a}^{b}\subset X$$

是 f 的 α 伪轨,若

$$\rho(f(x_j),x_{j+1})<\alpha,\quad j=a,\cdots,b-1.$$

定义 4.2.1 点 $x\in X$ 称为 f 的链回归点，如果对任意的 $\varepsilon>0$，都存在通过点 x 的周期的 ε 伪轨；f 的所有链回归点组成的集合称为 f 的链回归集，记为 $R(f)$.

命题 4.2.1 $x\in R(f)$ 当且仅当：对任意的 $\delta>0$，在 x 的 δ 球形邻域内必有 f 的周期的 δ 伪轨通过.

证明 必要性是显然的，下证充分性. 任取 $\varepsilon>0$，取 $0<\delta<\varepsilon/3$ 使之满足如下连续性要求

$$x,y\in X,\rho(x,y)<\delta\Rightarrow\rho(f(x),f(y))<\varepsilon/3.$$

设 $\{x_n|n\in\mathbf{Z}\}$ 是周期为 p 的 δ 伪轨，且 $(x_0,x)<\delta$，置

$$x'_n=\begin{cases}x, & n=kp,\\ x_n, & \text{其他情况}.\end{cases}$$

易证 $\{x'_n|n\in\mathbf{Z}\}$ 是过点 x 的周期为 p 的 ε 伪轨；从而 $x\in R(f)$. □

命题 4.2.2 有如下结论成立

(1) $R(f)$ 是闭集.

(2) $R(f^{-1})=R(f)$.

(3) $R(f)$ 是 f 的不变集.

(4) $\Omega(f)\subset R(f)$.

证明 由命题 4.2.1，易证上述结论. □

定理 4.2.5 设 X 是紧致度量空间，$f\in\mathrm{Homeo}(X)$，则

$$R(f|R(f))=R(f).$$

证明 显然有

$$R(f|R(f))\subset R(f),$$

故只须证

$$R(f)\subset R(f|R(f)).$$

任取 $x\in R(f)$ 和 $n\in\mathbf{N}$，存在过点 x 的周期的 $\frac{1}{n}$ 伪轨 $A_n=\{a_j^{(n)}\}$. 显然，A_n 是非空闭集，故 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\mathscr{F}(X)$. 又由于 $\mathscr{F}(X)$ 是完备的紧空间，从而 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 有收敛子列，不妨就记为 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$，收敛于非空紧集

$$A=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j\geqslant k}A_j\in\mathscr{F}(X).$$

显然 $x\in A$.

任给 $\varepsilon>0$，由 f 在 X 上的一致连续性，存在 $0<\delta<\varepsilon/3$，使

$$a,b\in X,\rho(a,b)<\delta\Rightarrow\rho(f(a),f(b))<\varepsilon/3.$$

又取 $n\in\mathbf{N}$ 充分大，满足

$$h_\rho(A_n,A)<\delta.$$

设 $A_n=\{a_j^{(n)}|j\in\mathbf{Z}\}$的周期为 $p>1$. 由引理 4.2.2 可取 $z_j\in A$, 使得

$$\rho(a_j^{(n)},z_j)<\delta,\quad j=0,1,\cdots,p-1.$$

于是

$$\rho(fz_j,z_{j+1})\leqslant\rho(fz_j,fa_j^{(n)})+\rho(fa_j^{(n)},a_{j+1}^{(n)})+\rho(a_{j+1}^{n},z_{j+1})<\varepsilon,$$

即$\{z_0,z_1,\cdots,z_{p-1}\}$生成一个周期为 p 的 ε 伪轨.

下证 $A\subset R(f|A)$. 事实上, 对任一 $y\in A$, 由引理 4.2.2, 存在 $a'\in A_n$ 满足

$$\rho(a',y)<\delta<\varepsilon/3.$$

相应地, 又可取 $z'\in\{z_j\}$满足

$$\rho(z',y)\leqslant\rho(z',a')+\rho(a',y)<\varepsilon.$$

即在 y 的任意 ε 球形邻域中有 f 在 A 中周期的 ε 伪轨通过, 由命题 4.2.1, 有

$$y\in R(f|A),$$

即

$$A\subset R(f|A)\subset R(f).$$

由 $x\in A$, 特别有

$$x\in R(f|R(f)),$$

考虑到 $x\in R(f)$, 故有结论成立. □

一般来讲, $\Omega(f|\Omega(f))$不一定为 $\Omega(f)$, 由命题 4.2.2, 可将 $\Omega(f)$扩展为 $R(f)$, 而在 $R(f)$上有 $R(f|R(f))=R(f)$成立. 在第十章中, 将讨论 $R(f)$上的稳定性问题.

§4.3 分形与吸引子

设(X,ρ)是完备的度量空间, $(\mathscr{F}(X),h_\rho)$是分形空间. 若 $A\in\mathscr{F}(X)$是集射 $W:\mathscr{F}(X)\to\mathscr{F}(X)$的不变集, 且满足

$$\lim_{n\to\infty}W^n(B)=A,\quad\forall B\in\mathscr{F}(X),$$

则称 A 为 W 的吸引子. 这时, 又称 A 所表示的图形为分形. 分形图形的维数是指可有限非零度量该图形的空间的维数. 通常有自相似维数, Hausdorff 维数与盒维数. 下面介绍后两种维数的定义与性质.

(1) Hausdorff 维数[59]

记 d 维欧几里得(Eudidean)度量空间 $\mathbf{R}^d$ 上的欧几里得距离为 ρ_E. 其子集族$\{U^k|k=1,2,\cdots\}$(可以是有限个)是 $\mathbf{R}^d$ 上子集 A 的一个覆盖. 记

$$H(A)=\{\{U_k\}|A\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}U_k\subseteq\mathbf{R}^d\},$$

$\mathbf{R}^d$ 中子集 U_k 的直径记为$|U_k|$. 设 $\delta>0$, 若$\{U_k\}\in H(A)$且$|U_k|\leqslant\delta(k=1,$

2, …), 则称其为 A 的一个 δ 覆盖. 记

$$H_\delta(A) = \{\{U_k\} \in H(A) \mid |U_k| \leqslant \delta, k = 1, 2, \cdots\},$$

显然, 当 $\delta_1 \leqslant \delta_2$ 时

$$H_{\delta_1}(A) \subseteq H_{\delta_2}(A). \tag{4.3.1}$$

设 A 为空间 $(\mathbf{R}^d, \rho_E)$ 的任一有界子集, $s \geqslant 0$, 对任意 $\delta > 0$, 定义

$$\mathscr{H}_\delta^s(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \mid \{U_i\} \in H_\delta(A)\right\}.$$

由(4.3.1)式当 δ 变小时, 能构成 A 的覆盖的集类变少, 故 $\mathscr{H}_\delta^s(A)$ 关于 δ 是不减的, 易证明, 极限值

$$\mathscr{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathscr{H}_\delta^s(A) \tag{4.3.2}$$

存在, 并且是 $(\mathbf{R}^d, \rho_E)$ 中 Borel 集类上的一个测度.

定义 4.3.1 设集 A 是度量空间 $(\mathbf{R}^d, \rho_E)$ 的 Borel 集, 对任意 $s \in (0, \infty)$, 称(4.3.2)定义的 $\mathscr{H}^s(A)$ 为集 A 关于 s 的 Hausdorff 测度.

定理 4.3.1 设 A 是 $(\mathbf{R}^d, \rho_E)$ 的有界集, 则存在唯一的 $s_0 \in [0, d]$ 使

$$\mathscr{H}^t(A) = \begin{cases} \infty, & t < s_0, \\ 0, & t > s_0. \end{cases}$$

证明 对给定的有界集 $A \subset \mathbf{R}^d$, 设 $0 < \delta < 1$, 且 $\{U_k \mid k = 1, 2, \cdots\} \in H_\delta(A)$. 当 $t > s \geqslant 0$ 时有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^t = \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s \cdot |U_k|^{t-s} \leqslant \delta^{t-s} \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s.$$

取其下确界得

$$\mathscr{H}_\delta^t(A) \leqslant \delta^{t-s} \mathscr{H}_\delta^s(A) \qquad (t > s \geqslant 0). \tag{4.3.3}$$

取 $\mathbf{R}^d$ 空间中的单位立方体 C, 将 C 的每条边等分为 K 得到 K^d 个小立方体, 每个小立方体的直径是 $\frac{1}{K}\sqrt{d}$, 取 $\delta \leqslant \frac{1}{K}\sqrt{d} < 1$ 有

$$\mathscr{H}_\delta^d(C) \leqslant K^d (K^{-1}\sqrt{d})^d = d^{d/2} < \infty,$$

在(4.3.3)式中取 A 为 C 得

$$0 \leqslant \mathscr{H}_\delta^t(C) \leqslant \delta^{t-d} \mathscr{H}_\delta^d(C) \leqslant \delta^{t-d} d^{d/2}, \quad t > d.$$

令 $\delta \to 0$ 有 $\mathscr{H}^t(C) = 0$ 对 $\forall\, t > d$ 成立. 由于有界集 $A \subset \mathbf{R}^d$, 故可用有限个单位立方体 C 来覆盖, 由测度的可列可加性和单调性, 知

$$\mathscr{H}^t(A) = 0, \quad t > d \tag{4.3.4}$$

成立, 记唯一的

$$s_0 = \inf\{t \mid \mathscr{H}^t(A) = 0\}, \tag{4.3.5}$$

显然 $s_0 \geqslant 0$, 再由(4.3.4)式有

$$0 \leqslant s_0 \leqslant d, \tag{4.3.6}$$

于是有

$$\mathscr{H}^t(A) = 0, \quad \forall t > s_0 \tag{4.3.7}$$

成立. 可以断言

$$\mathscr{H}^t(A) = +\infty, \quad \forall t < s_0. \tag{4.3.8}$$

否则, 存在 $s < s_0$ 使 $\mathscr{H}^s(A) < +\infty$, 由(4.3.3)式有

$$\mathscr{H}^t(A) = 0, \quad \forall t \in (s, s_0),$$

与(4.3.5)矛盾. 联合(4.3.6)~(4.3.8)知结论成立. □

定义 4.3.2 称由定理 4.3.1 中唯一确定的实数 s_0 为度量空间($\mathbf{R}^d$, ρ_E)中子集 A 的 Hausdorff 维数, 记为

$$\dim_H(A) = s_0.$$

对于空间 $\mathbf{R}^d$ 中子集 A 的 Hausdorff 维数, 有如下性质.

命题 4.3.1 设 A 是 $\mathbf{R}^d$ 中的子集, 则

$$\dim_H(A) \leqslant d.$$

证明 $\mathbf{R}^d$ 可用可列个单位立方体 C 来覆盖, 而 $\mathscr{H}^t(C)=0$, 故 $\mathscr{H}^t(R^d)=0$, $\forall t > d$. 而 $A \subset \mathbf{R}^d$, 故 $\mathscr{H}^t(A)=0$, $\forall t > d$, 由此可知结论成立. □

命题 4.3.2 在 $\mathbf{R}^d$ 空间中, 若集 $A \subset B$, 则

$$\dim_H(A) \leqslant \dim_H(B).$$

证明 由 Hausdorff 测度的单调性, 有

$$0 \leqslant \mathscr{H}^t(A) \leqslant \mathscr{H}^t(B) = 0, \quad \forall t > \dim_H(B).$$

知结论成立. □

命题 4.3.3 设 $A \subset \mathbf{R}^d$ 是开集, 则

$$\dim_H(A) = d.$$

证明 设 B 是边长为 r 的立方体, 将 B 的每条边 K 等分得到 K^d 个小立方体, 其直径为$\frac{r}{K}\sqrt{d}$, 类似于定理 4.3.1 的证明, 有

$$\mathscr{H}_\delta^d(B) = \sum_{j=1}^{K^d}\left(\frac{r}{K}\sqrt{d}\right)^d = r^d d^{d/2} > 0.$$

令 $\delta \to 0$ 得 $\mathscr{H}^d(B) = r^d d^{d/2} > 0$, 故 $\dim_H(B) = d$. 对 $\mathbf{R}^d$ 中任一开集 A, 必存在一个边长为 r 的立方体 $B \subseteq A$, 由命题 4.3.1 和 4.3.2 有

$$d = \dim_H(B) \leqslant \dim_H(A) \leqslant d,$$

故结论成立. □

命题 4.3.4 设 $A_1, A_2, \cdots$ 是度量空间 $\mathbf{R}^d$ 中的一个子集序列, 则

$$\dim_H\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sup_k(\dim_H(A_k)).$$

证明　首先由

$$A_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad i = 1,2,\cdots$$

及命题 4.3.2 有

$$\sup_i(\dim_H(A_i)) \leqslant \dim_H\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right), \tag{4.3.9}$$

另一方面,设

$$\sup_i(\dim_H(A_i)) \geqslant \dim_H\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \tag{4.3.10}$$

不成立,则存在一实数 t 使

$$\dim_H(A_j) \leqslant \sup_i(\dim_H(A_i)) < t < \dim_H\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right), \quad j = 1,2,\cdots$$

由定理 4.3.1 有

$$\mathscr{H}^t(A_j) = 0, \quad j = 1,2,\cdots$$

和

$$\mathscr{H}^t\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \infty.$$

但后一式与由前一式利用测度可列可加性得到的 $\mathscr{H}^t\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = 0$ 矛盾,从而,(4.3.10)成立,联合(4.3.9)知结论成立. □

命题 4.3.5　设 A 为 $\mathbf{R}^d$ 中的可列点集,则 $\dim_H A = 0$.

证明　设 $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, A_k 为单点集,对单点集有

$$\mathscr{H}^0(A_k) = 1, \quad k = 1,2,\cdots$$

故 $\dim_H(A_k) = 0$, $k = 1,2,\cdots$利用上一命题可证本命题结论成立. □

例 4.3.1　在平面上将一个单位正方形等分成 16 个完全相等的小正方形,然后每行每列只保留一个小正方形,在留下的小正方形上施以同样的作法,重复直至无穷,其极限集 A 称为康托尔尘,则 $\dim_H(A) = 1$.

证明　康托尔尘 A 可被第 n 次选中的 4^n 个边长为 4^{-n}的正方形覆盖,其直径 δ 为 $4^{-n}\sqrt{2}$,于是

$$\mathscr{H}_\delta^1(A) \leqslant 4^n \cdot 4^{-n}\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

当 $n \to \infty$时, $\delta = 4^{-n}\sqrt{2} \to 0$ 于是 $\mathscr{H}^1(A) \leqslant \sqrt{2}$,故

$$\dim_H(A) \leqslant 1.$$

又记 A 在 x 轴上的投影为 $\mathrm{proj}A = [0,1]$,由于

$$\rho_E(\mathrm{proj}\{p\}, \mathrm{proj}\{g\}) \leqslant \rho_E(p,g), \quad \forall\, p, g \in \mathbf{R}^2$$

利用稍后定理 4.3.4 中证明的(4.2.14)式有

$$1 = \dim_H(\mathrm{proj}A) \leqslant \dim_H(A),$$

于是, $\dim_H(A)=1$. □

(2)盒维数

对空间 (X,ρ) 中的紧子集 $A\in\mathscr{F}(X)$ 及每个 $\delta>0$, 用 $N_\delta(A)$ 表示覆盖 A 的半径为 δ 的闭球的最小个数.

定义 4.3.3 如果极限

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(A)}{-\log\delta}$$

存在, 则称其为紧集 $A\in\mathscr{F}(X)$ 的盒维数, 记为 $\dim_B(A)$.

盒维数定义中的闭球覆盖可等价地换成边长为 δ 的单位正方体覆盖.

设 $m_1,m_2,\cdots,m_d$ 是整数, 称 $\mathbf{R}^d$ 中边长为 δ 的立方体

$$[m_1\delta,(m_1+1)\delta]\times\cdots\times[m_d\delta,(m_d+1)\delta]$$

为空间 $\mathbf{R}^d$ 中的 δ 网坐标块.

定理 4.3.2 设 $M_\delta(A)$ 是集 $A\in\mathscr{F}(X)$ 与 δ 网坐标块相交的个数, 则

$$\dim_B(A)=\lim_{\delta\to 0}\frac{\log M_\delta(A)}{-\log\delta}.$$

证明 对每个边长为 δ 的 d 维立方体可被一个直径为 $\delta\sqrt{d}$ 的闭球所覆盖, 于是 $M_\delta(A)$ 个直径为 $\delta\sqrt{d}$ 的闭球是 A 的一个 $\delta\sqrt{d}$ 覆盖, 故

$$N_{\delta\sqrt{d}}(A)\leqslant M_\delta(A).$$

只要 δ 充分小, 就有

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{d}}(A)}{-\log\delta\sqrt{d}}\leqslant\frac{\log M_\delta(A)}{-\log\delta}\cdot\frac{\log\delta}{\log\delta\sqrt{d}}.$$

令 $\delta\to 0$, 得

$$\dim_B(A)\leqslant\lim_{\delta\to 0}\frac{\log M_\delta(A)}{-\log\delta}.$$

同时, 一个边长为 δ 的立方体可用数量不超过 3^d 个直径为 δ 的闭球覆盖, 故

$$M_\delta(A)\leqslant 3^d N_\delta(A).$$

类似可证

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\log M_\delta(A)}{-\log\delta}\leqslant\dim_B(A),$$

联合前式知结论成立. □

定理 4.3.3 设 $A\in\mathscr{F}(X)$ 且盒维数存在, 若 $\delta_n=cr^n, 0<r<1, c>0$, 则

$$\dim_B(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{\log N_{\delta_n}(A)}{-\log\delta_n}.$$

证明 记集 A 与 δ 网坐标块相交的个数为 $N_\delta(A)$, 设 $\delta_{n+1}\leqslant\delta\leqslant\delta_n$. 由

$$\frac{\log N_\delta(A)}{-\log\delta}\leqslant\frac{\log N_{\delta_{n+1}}(A)}{-\log\delta_n}=\frac{\log N_{\delta_{n+1}}(A)}{-\log\delta_{n+1}+\log(\delta_{n+1}/\delta_n)}$$

$$= \frac{\log N_{\delta_{n+1}}(A)}{-\log\delta_{n+1} + \log r},$$

可证

$$\dim_B(A) \leqslant \lim_{n\to 0} \frac{\log N_{\delta_n}(A)}{-\log\delta_n}.$$

类似可证

$$\dim_B(A) \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\log N_{\delta_n}(A)}{-\log\delta_n}.$$

故结论成立. □

类似于 Hausdorff 维数的性质,有如下结论.

命题 4.3.6　对于盒维数,有如下结论成立:

(1)设 A 是空间 $\mathbf{R}^d$ 内的 m 维子流形,则 $\dim_B(A)=m$.

(2)若 $A\subset\mathbf{R}^d$,则 $\dim_B(A)\leqslant d$.

(3)若 $A\subset B$,则 $\dim_B(A)\leqslant\dim_B(B)$.

(4)盒维数是有限稳定的,即若 $A,B\subset\mathbf{R}^d$ 的盒维数存在,则

$$\dim_B(A\cup B) = \max(\dim_B(A),\dim_B(B)).$$

例 4.3.2　求 Sierpinski 三角形的盒维数.

解　Sierpinski 三角形的作法如下:在腰长为 1 的等腰直角三角形中,作各边中点的连线得四个全等三角形,去掉中心的一个,再在剩下的三个三角形中重复同样的做法,直至极限集 A.

取 $\delta(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$,记 $N_{\delta(n)}(A)=N_n(A)$,显然 $N_n(A)=3^n$ 于是

$$\dim_B(A) = \lim_{n\to\infty}\frac{\log N_n(A)}{-\log\delta(n)} = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

(3)Hausdorff 维数与盒维数的关系

定理 4.3.4　若 $A\in\mathscr{F}(\mathbf{R}^d)$,则

$$\dim_H(A)\leqslant\dim_B(A)\leqslant d.$$

证明　只证第一个不等式.记 $s=\dim_H(A)$,对任意小的 $\varepsilon>0$ 有

$$\mathscr{H}^{s-\varepsilon}(A) = \infty.$$

取充分小的 $\delta>0$,使

$$1 < \mathscr{H}_\delta^{s-\varepsilon}(A) < N_\delta(A)\delta^{s-\varepsilon},$$

其中 $N_\delta(A)$是覆盖 A 的直径为δ 的最小闭球数,故

$$0 < \log N_\delta(A) + (s-\varepsilon)\log\delta,$$

即

$$s-\varepsilon<\frac{\log N_\delta(A)}{-\log\delta}.$$

令 $\delta\to 0$,并由 ε 的任意性知结论的第一个不等式成立. □

定理 4.3.5 设(X_1,ρ_1)和(X_2,ρ_2)是两个等价的度量空间,$\theta:X_1\to X_2$,是使 X_1 和 X_2 等价的变换,即存在常数 $e_1,e_2>0$,对任意 $x,y\in X_1$,使

$$e_1\rho_2(\theta(x),\theta(y))\leqslant\rho_1(x,y)\leqslant e_2\rho_2(\theta(x),\theta(y)).\quad(4.3.11)$$

若 $A_1\in\mathscr{F}(X_1)$且 $A_2=\theta(A_1)\in\mathscr{F}(X_2)$,则

$$\dim_H(A_1)=\dim_H(A_2),\quad(4.3.12)$$

$$\dim_B(A_1)=\dim_B(A_2).\quad(4.3.13)$$

证明 只证(4.3.12).不妨设 $e_1<1<e_2$,由(4.3.11)左不等式有

$$\rho_2(\theta(x),\theta(y))\leqslant\frac{1}{e_1}\rho_1(x,y),\quad\forall x,y\in X_1.$$

若$\{U_i\}$是 A_1 的一个 δ 覆盖,则$\{\theta(U_i)\}$是 A_2 的一个 $e_1^{-1}\delta$ 覆盖,且

$$\mathscr{H}^s_{\delta/e_1}(A_2)\leqslant\sum_i|\theta_i(U_i)|^s\leqslant e_1^{-s}\sum_i|U_i|^s=e_1^{-s}\mathscr{H}^s_\delta(A_1),\quad\forall s\geqslant 0.$$

令 $\delta\to 0$ 得

$$\mathscr{H}^s(A_2)\leqslant e^{-s}\mathscr{H}^s(A_1),\quad\forall s\geqslant 0.\quad(4.3.14)$$

应有

$$\dim_H(A_2)\leqslant\dim_H(A_1).\quad(4.3.15)$$

若其不然,存在 $t>0$,使

$$\dim_H(A_2)>t>\dim_H(A_1),$$

可得 $\mathscr{H}^t(A_1)=0,\mathscr{H}^t(A_2)=\infty$,与(4.3.14)式矛盾.另一方面,由(4.3.11)的右不等式类似可证

$$\dim_H(A_2)\geqslant\dim_H(A_1)$$

成立,联合(4.3.15)有(4.3.12)式成立.类似可证(4.3.13). □

§4.4 分形动力系统

设自然数 $N>1$,字符集 $S=\{1,2,\cdots,N\}$上的序列空间$(\Sigma_+(N),d)$如§3.1 所定义,下面简记 $\Sigma_+(N)$为 Σ,即

$$\Sigma=\{\sigma\,|\,\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots,\sigma_j\in S,j\in\mathbf{N}\}.$$

设(X,ρ)是完备的度量空间,$W=\{w_1,w_2,\cdots,w_N\}$是 X 上压缩比为 $c=\max\{c_1,\cdots,c_N\}$的双曲迭代函数系.若 $\sigma\in\Sigma$,记

$$\Phi(\sigma,n,x)=w_{\sigma_1}\circ w_{\sigma_2}\circ\cdots\circ w_{\sigma_n}(\{x\}),$$

其中 $x\in X,n\in\mathbf{N}$.对任一 $B\in\mathscr{F}(X)$,容易证明

$$W^n(B) = \bigcup_{x \in B} W^n(\{x\}) = \bigcup_{x \in B} \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \Phi(\sigma, n, x), \tag{4.4.1}$$

对 $K \in \mathscr{F}(X)$,定义 $w_0 : \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(X)$ 为

$$w_0(B) = K, \quad \forall B \in \mathscr{F}(X),$$

称为凝聚映射.记

$$\boldsymbol{W}_0 = \{w_0, w_1, \cdots, w_N\},$$

类似于定理 4.3.3,不难证明 $\boldsymbol{W}_0$ 是完备度量空间$(\mathscr{F}(X), h_\rho)$上压缩比为 c 的压缩映射,因而存在唯一的不动点 $A \in \mathscr{F}(X)$是 $\mathscr{F}(X)$上的吸引子.

用数学归纳法不难证明下列命题.

命题 4.4.1　在如上假设下,

$$A = \lim_{n \to \infty} K \cup \boldsymbol{W}(K) \cup \cdots \cup \boldsymbol{W}^n(K) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{W}^n(K).$$

引理 4.4.1　设 $K \in \mathscr{F}(X)$且 $K \neq \varnothing$,则存在常数 $\alpha > 0$,对 $m, n \in \mathbf{N}$, $x_1, x_2 \in K$,有

$$\rho(\Phi(\sigma, m, x_1), \Phi(\sigma, n, x_2)) \leqslant \alpha c^{m \wedge n}, \quad \forall \sigma \in \Sigma,$$

其中

$$m \wedge n = \inf(m, n), \qquad c = \max\{c_1, \cdots, c_N\}.$$

证明　不妨设 $m < n$,即 $m = m \wedge n$.当 $x_1, x_2 \in K$ 时,

$$\Phi(\sigma, n, x_2) = w_{\sigma_1} \circ \cdots \circ w_{\sigma_m}(\Phi(\omega, n-m, x_2)),$$

其中 $\omega = \sigma_{m+1}\sigma_{m+2}\cdots\sigma_n\cdots \in \Sigma$.记

$$x_3 = \Phi(\omega, n-m, x_2).$$

由命题 4.4.1, $x_3 \in A$.于是

$$\begin{aligned}\rho(\Phi(\sigma, m, x_1), \Phi(\sigma, n, x_2)) &= \rho(\Phi(\sigma, m, x_1), \Phi(\sigma, m, x_3)) \\ &\leqslant c^m \rho(x_1, x_3).\end{aligned}$$

记

$$\alpha = \max\{\rho(x_1, x_3) \mid x_1, x_3 \in A\},$$

由于 A 是紧集,故 α 有界,从而结论成立.　□

定理 4.4.1　设(X, ρ)是完备的度量空间, $A \in \mathscr{F}(X)$是$\{X, \boldsymbol{W}\}$的吸引子,则如下结论成立:

(1) $\forall \sigma \in \Sigma$, $x \in X$,极限 $\lim_{n \to \infty} \Phi(\sigma, n, x)$存在,记为 $\Phi(\sigma)$.

(2) $\Phi(\sigma) \in A$ 且与 $x \in X$ 的选择无关.

(3) $\Phi: \Sigma \to A$ 是连续的满射.

证明　(证结论(1))　任给 $x \in X$,取 $K \in \mathscr{F}(X)$使 $x \in K$,由引理 4.4.1 知$\{\Phi(\sigma, n, x)\}_{n \in \mathbf{N}}$是完备空间 X 中的 Cauchy 列,故存在 $\Phi(\sigma) \in X$ 使

$$\Phi(\sigma) = \lim_{n \to \infty} \Phi(\sigma, n, x).$$

(证结论(2)) 设 A 是吸引子,故 $A=\lim\limits_{n\to\infty}W^n(K)$. 对任给的 $\varepsilon>0$,当 n 充分大后,有

$$\Phi(\sigma,n,x)\in W^n(K)\subset(A)_\varepsilon,$$

在上式中令 $n\to\infty$,再令 $\varepsilon\to 0$,有 $\Phi(\sigma)\in A$. 又设 $x_1\neq x_2$, $\Phi(\sigma,n,x_j)$的极限为 $\Phi(\sigma,x_j)$, $j=1,2$,由引理 4.4.1 必有

$$\Phi(\sigma,x_1)=\Phi(\sigma,x_2),$$

故 $\Phi(\alpha)$与 $x\in X$ 的选择无关.

(证结论(3)) 由前证,可定义映射 $\Phi:\Sigma\to X$ 使 $\Phi(\Sigma)\subset A$. 先证 Φ 是连续的. 任给 $\varepsilon>0$,取充分小的 $\delta>0$,使满足

$$d(\sigma,\omega)<\delta$$

的 $\sigma,\omega\in\Sigma$ 具有性质:

1° σ 和 ω 的前 n 项相同,即

$$\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n\sigma',\quad \sigma'=\sigma_{n+1}\sigma_{n+2}\cdots,$$

$$\omega=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n\omega',\quad \omega'=\omega_{n+1}\omega_{n+2}\cdots.$$

2° n 充分大,使得引理 4.4.1 中

$$\alpha c^n<\varepsilon.$$

如果 $x\in X$, $m>n$,记

$$x_1=\Phi(\sigma',m-n,x),\quad x_2=\Phi(\omega',m-n,x),$$

当 m 充分大后,$x_1,x_2\in A$. 于是,由引理 4.4.1 有

$$\begin{aligned}&\rho(\Phi(\sigma,m,x),\ \Phi(\omega,m,x))\\&=\rho(\Phi(\sigma,n,\Phi(\sigma',m-n,x)),\ \Phi(\omega,n,\Phi(\omega',m-n,x)))\\&=\rho(\Phi(\sigma,n,x_1),\ \Phi(\sigma,n,x_2))<\alpha c^n<\varepsilon,\end{aligned}$$

令 $m\to+\infty$,由前证有

$$\rho(\Phi(\sigma),\ \Phi(\omega))<\varepsilon,$$

即 $\Phi:\Sigma\to A$ 连续.

再证 $\Phi:\Sigma\to A$ 是满射. 由(4.4.1),

$$A=\lim_{n\to\infty}W^n(\{x\})=\lim_{n\to\infty}\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\Phi(\sigma,n,x),$$

于是,对任意 $a\in A$,存在点列$\{\omega^{(n)}\mid n\in\mathbf{N}\}\subset\Sigma$ 使

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(\omega^{(n)},n,x)=a.$$

由命题 3.1.2,(Σ,d)是紧空间,故$\{\omega^{(n)}\}$有收敛子列,不妨就记为$\{\omega^{(n)}\mid n\in\mathbf{N}\}$,即存在 $\omega\in\Sigma$ 使

$$\lim_{n\to\infty}\omega^{(n)}=\omega.$$

记

$$a(n) = \mathrm{Card}\{j \in \mathbf{N} \mid \omega_k^{(n)} = \omega_k, 1 \leqslant k < j\},$$

显然 $a(n) \to +\infty (n \to \infty)$，于是，由

$$\rho(\Phi(\omega, n, x), \Phi(\omega^{(n)}, n, x)) \leqslant \alpha c^{a(n)},$$

令 $n \to \infty$ 有

$$\rho(\Phi(\omega), a) = 0$$

或

$$a = \Phi(\omega),$$

即 $\Phi: \Sigma \to A$ 是满射. □

在定理 4.4.1 的条件下，设 $a \in A$，称

$$\Phi^{-1}(a) = \{\sigma \in \Sigma \mid \Phi(\sigma) = a\}$$

为点 $a \in A$ 的地址集.

命题 4.4.2　在定理 4.4.1 的条件下，如果任意一点 $a \in A$ 的地址集 $\Phi^{-1}(a)$ 是单点集，则吸引子 A 是完全不连通集.

证明　按条件所设及引理3.1.1，$\Phi: \Sigma \to A$ 是同胚；再由命题3.1.2知 $A \in \mathscr{F}(X)$ 是完全不连通集. □

定义 4.4.1　设 $\{X, W\}$ 是双曲迭代函数系，如果吸引子 A 中任意一点 $a \in A$ 的地址集是单点集，则称 $\{X, W\}$ 是全不连通的.

设 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots \in \Sigma$，$k \in \{1, 2, \cdots, N\}$ 用 $k\sigma$ 表示连接运算，即

$$k\sigma = k\sigma_1\sigma_2\cdots.$$

命题 4.4.3　设双曲迭代函数系 $\{X, W\}$ 是全不连通的，则 $w_k: A \to A$ 是双射，$k = 1, 2, \cdots, N$.

证明　如果存在 $1 \leqslant k \leqslant N$ 使 $w_k: A \to A$ 不是双射，则存在 $x_1, x_2 \in A$ 而 $x_1 \neq x_2$ 使

$$w_k(x_1) = w_k(x_2) = a \in A.$$

设 x_1 和 x_2 的地址分别是 σ 和 ω，则 $a \in A$ 有两个不同的地址 $k\sigma$ 和 $k\omega$，与全不连通的条件矛盾，故结论成立. □

称 $\{X, W\}$ 是一个可逆的迭代函数系，如果 w_k 可逆，$k = 1, 2, \cdots, N$.

定理 4.4.2　设 $\{X, W\}$ 是一个可逆的双曲迭代函数系，A 是 W 的吸引子，则 $\{X, W\}$ 全不连通，当且仅当 $i \neq j$，$i, j \in \{1, 2, \cdots, N\}$ 时

$$w_i(A) \cap w_j(A) = \varnothing. \tag{4.4.2}$$

证明　首先，设 $\{X, W\}$ 是全不连通的. 如果存在 $i \neq j$ 及 $x \in X$ 使

$$x \in w_i(A) \cap w_j(A),$$

则存在 $y, z \in A$，使 $x = w_i(y) = w_j(z)$. 设 y 和 z 的地址分别是 σ 和 ω，则 x 有两个不同的地址 $i\sigma$ 和 $j\omega (i \neq j)$，与全不连通的假设矛盾，故 $i \neq j$ 时，有

(4.4.2)成立.

其次,设(4.4.2)式成立.如果$\{X, W\}$不是全不连通的,即存在$x \in A$有两个不同的地址$\sigma_1 \cdots \sigma_n \sigma_{n+1} \cdots$和$\sigma_1 \cdots \sigma_n \sigma'_{n+1} \cdots$,其中$\sigma_{n+1}$和$\sigma'_{n+1}$,是首次不一致的符号,设$\sigma_{n+1} = i, \sigma'_{n+1} = j$,记

$$y = w_i(w_{\sigma_{n+1}}^{-1} w_{\sigma_n}^{-1} \cdots \omega_{\sigma_1}^{-1}(x)) = w_j(w_{\sigma'_{n+1}}^{-1} w_{\sigma_n}^{-1} \cdots w_{\sigma_1}^{-1}(x)),$$

有

$$y \in w_i(A) \cap w_j(A),$$

与所设矛盾,故$\{X, W\}$是全不连通的. □

定义 4.4.2 设$\{X, W\}$是全不连通的, A 是其吸引子,称映射

$$S: A \to A,\ a \mapsto w_n^{-1}(a),\ a \in w_n(A)$$

为吸引子 A 上的漂移映射,动力系统(A, S)称为漂移动力系统.

例 4.4.1 设 $X = [0, 1]$, $w_1(x) = x/3$, $w_2(x) = 1 - x/3$ 则$\{X, \omega_1, \omega_2\}$是双曲迭代函数系,其吸引子 A 是康托尔三分集.漂移映射

$$S(x) = \frac{3}{2}(1 - |2x - 1|), \quad \forall x \in A.$$

(A, S)是相应的漂移动力系统.

下面设 T 是符号空间Σ上的转移自映射(见定义 3.1.3).

定理 4.4.3 漂移动力系统(A, S)与符号动力系统(Σ, T)拓扑共轭.

证明 由于$\{X, W\}$全不连通,故映射 $\Phi: \Sigma \to A$ 是同胚.

任给$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \in \Sigma$,则存在$a \in A$,使

$$a = \Phi(\sigma) = \lim_{n \to \infty} w_{\sigma_1} \circ w_{\sigma_2} \circ \cdots \circ w_{\sigma_n}\{x\})$$

$$= w_{\sigma_1}(\lim_{n \to \infty} w_{\sigma_2} \circ \cdots \circ w_{\sigma_n}\{x\}) \in w_{\sigma_1}(A).$$

于是,对任一$\sigma \in \Sigma$有

$$\Phi^{-1} \circ S \circ \Phi(\sigma) = \Phi^{-1}(w_{\sigma_1}^{-1}(\Phi(\sigma))) = \Phi^{-1} \circ \Phi(T(\sigma)) = T(\sigma),$$

即

$$S \circ \Phi = \Phi \circ T,$$

从而结论成立. □

定理 4.4.4 设 $N \geqslant 2$, $\{X, W\}$是全不连通的,则其对应的漂移动力系统(A, S)是混沌动力系统.

证明 由定理 3.2.3 和定理 4.4.3 立即可得. □

注 4.4.1 混沌动力系统(X, f)的另一种定义是满足如下条件:

1° (X, f)是可迁的.

2° (X, f)对初始条件是敏感的.

3° f 的轨道集在 X 中稠.

在这种定义下同样有定理 4.4.4. 所谓(X,f)是可迁的,即对 X 中的任意两个开子集 U 和 V,存在 $n\in\mathbf{Z}$ 使

$$U\cap f^{n}(V)\neq\varnothing.$$

所谓(X,f)对初始条件敏感,即存在 $\delta>0$,对任意的 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$,存在 $y\in B(x,\varepsilon)$和 $n\in\mathbf{N}$,使

$$\rho(f^{n}(x),f^{n}(y))>\delta. \qquad \square$$

如果迭代函数系$\{X,W\}$不是全不连通的,则可用"升腾"的方法构造一个全不连通的迭代函数系,使得 W 的吸引子 A 是"升腾吸引子"$\widetilde{A}$ 在原空间 X 上的投影. 下面仅就 $N=2$ 的情况介绍升腾动力系统,对于 $N>2$ 的情况,是类似的.

设(X,ρ)是度量空间,$\{X,w_1,w_2\}$是双曲迭代函数系,并简记 $\Sigma_+(2)$为 Σ. 作积空间 $X\times\Sigma$,并定义 $\widetilde{w}_j:X\times\Sigma\to X\times\Sigma$ 为

$$\tilde{\omega}_1(x,\sigma)=(\omega_1(x),1\sigma),\quad\forall(x,\sigma)\in X\times\Sigma,$$

$$\tilde{\omega}_2(x,\sigma)=(\omega_2(x),2\sigma),\quad\forall(x,\sigma)\in X\times\Sigma,$$

其中 $j\sigma(j=1,2)$是连接运算.

积空间 $X\times\Sigma$ 的度量 h 取

$$h((x,\sigma),(y,\omega))=\rho(x,y)\cdot d(\sigma,\omega),\quad\forall(x,\sigma),(y,\omega)\in X\times\Sigma,$$

其中

$$d(\sigma,\omega)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|\sigma_k-\omega_k|}{2^k},\quad\forall\sigma,\omega\in\Sigma.$$

定义 4.4.3 设$\{X,w_1,w_2\}$是双曲迭代函数系,称$\{X\times\Sigma,\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2\}$为其对应的升腾迭代函数系.

设 Σ 上的映射 Φ 如定理 4.4.1 所述,则记 Φ 的图为

$$\widetilde{A}=\{(\Phi(\sigma),\sigma)\mid\sigma\in\Sigma\}.$$

命题 4.4.4 设 A 是$\{X,\omega_1,\omega_2\}$的吸引子,映射 $\Phi:\Sigma\to A$ 如定理 4.4.1 所定义,则 A 是 Φ 的图 $\widetilde{A}$ 在 X 上投影,即

$$A=\{x\in X\mid(x,\sigma)\in\widetilde{A},\exists\sigma\in\Sigma\}.$$

证明 右端显等于 $\Phi(\Sigma)$,由定理 4.4.1 知结论成立. $\square$

定理 4.4.5 设 A 是双曲迭代函数系$\{X,w_1,w_2\}$的吸引子,若 $w_j:A\to A(j=1,2)$是可逆的,则$\{X\times\Sigma,\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2\}$是双曲的全不连通的,且 $\widetilde{A}$ 是其吸引子.

证明 首先,证 $\widetilde{w}_j(x,\sigma)(j=1,2)$是压缩的. 设$\{X,w_1,w_2\}$的压缩比 $0<c<1$,于是对$(x,\sigma),(y,\omega)\in X\times\Sigma$, $j=1,2$,有

$$h(\widetilde{\omega}_j(x,\sigma),\widetilde{\omega}_j(y,\omega))=h((\omega_j(x),j\sigma),(\omega_j(y),j\omega))$$

$$\leqslant \frac{c}{2}\rho(x,y)d(\sigma,\omega) = \frac{c}{2}h((x,\sigma),(y,\omega)).$$

即 $\widetilde{w}_j(j=1,2)$是压缩的,且不难核验 $\widetilde{A}$ 是$\{X\times\Sigma,\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2\}$的吸引子.

其次,由 $w_j(j=1,2)$是可逆的,且 Σ 是由$\{1,2\}$生成的符号空间,不难核验 $\widetilde{w}_j(j=1,2)$是可逆的.

最后,当$(x,\sigma)\in\widetilde{w}_1(\widetilde{A})$且$(y,\omega)\in\widetilde{w}_2(\widetilde{A})$时,由 $\widetilde{w}_j(j=1,2)$的定义必有 $\sigma_1=1$, $w_1=2$,即 $\sigma\neq\omega$,故

$$\widetilde{w}_1(\widetilde{A})\cap\widetilde{w}_2(\widetilde{A}) = \varnothing.$$

于是,由定理 4.4.2 知结论成立. □

推论 4.4.1 在定理 4.4.5 的条件下,映射

$$\tilde{S}(x,\sigma) = (w_i^{-1}(x),T(\alpha)),\quad \sigma_1 = i,\quad \forall(x,\alpha)\in\widetilde{A},$$

为吸引子 $\widetilde{A}$ 上的漂移映射.

定义 4.4.4 称$(\widetilde{A},\tilde{S})$为相应于$\{X\times\Sigma,\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2\}$的升腾漂移动力系统.

由定理 4.4.4 和定理 4.4.5 立即得下列推论.

推论 4.4.2 定理 4.4.5 的条件下,$(\widetilde{A},\tilde{S})$是混沌动力系统.

在定理 4.4.5 的条件下,同样可以定义映射 $S:A\to A$:

$$a\mapsto w_j^{-1}(a),\quad a\in w_j(A), a\in A,$$

而有动力系统(A,S).

定理 4.4.6 在定理 4.4.5 的条件下,$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$是相应于动力系统(A,S)的任意一条轨道,则存在升腾漂移动力系统$(\widetilde{A},\tilde{S})$的轨道$\{\tilde{x}_n\}_{n=0}$,使得对任意 $n\in\mathbf{Z}_+$, $\tilde{x}_n$ 在 X 上的投影是 x_n.

证明 由定理 4.4.5 和命题 4.4.4 可以证明该定理的结论. □

第五章　遍历理论

概率空间上的一个保测变换可生成一个随机动力系统.本章主要简述该系统中两个重要的概念:度量熵和 Lyapunov 指数.主要的参考文献有[35],[36],[60],[61],[62],关于随机动力系统的光滑遍历理论,有专著[63].

§5.1　保测变换

设 Ω 是一个集合.子集族 $\mathscr{S}\subset 2^{\Omega}$ 称为半代数,若满足如下条件:

S(1)　$\varnothing\in\mathscr{S}$.

S(2)　$A,B\in\mathscr{S}\Rightarrow A\cap B\in\mathscr{S}$.

S(3)　$A\in\mathscr{S}\Rightarrow\Omega\setminus A=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$,存在 $E_i\in\mathscr{S}$ 且 $E_i\cap E_j=\varnothing$, $i\neq j$, $i,j=1,\cdots,n$.

一个半代数 $\mathscr{A}\subset 2^{\Omega}$ 称为代数,若在条件 S(3)中,要求 $\Omega\setminus A\in\mathscr{A}$,即 $\mathscr{A}$ 对余运算是封闭的.这时,E_i 自然存在.在代数 $\mathscr{A}$ 中,条件 S(2)可换为

$$A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{A}\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{A}. \tag{5.1.1}$$

一个代数 $\mathscr{F}\subset 2^{\Omega}$ 称为 σ 代数,若条件(5.1.1)换为

$$A_i\in\mathscr{F},\ i=1,2,\cdots\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}. \tag{5.1.2}$$

这时,称$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间.实函数 $P:\mathscr{F}\to\mathbf{R}^{+}$ 称为可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的测度,若满足可列可加性,即

(1)$P(\varnothing)=0$.

(2)$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$, $A_n\in\mathscr{F}$, $i=1,2,\cdots$, 且两两不交.

如果 $P(\Omega)=1$,称测度空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间,或正则测度空间,而称测度 P 为概率测度.显然,当$(\Omega,\mathscr{F})$上的测度 μ 使 $\mu(\Omega)<+\infty$ 时,总可以定义概率 $P=(\mu(\Omega))^{-1}\mu$.因此,本章限于概率空间.

称 $\mathscr{B}(\mathscr{A})$是代数 $\mathscr{A}$ 生成的 σ 代数,即所有含 $\mathscr{A}$ 的 σ 代数的交.如果映射 $\tau:\mathscr{A}\to\mathbf{R}^{+}$ 具可列可加性且 $\tau(\Omega)=1$,则存在$(\Omega,\mathscr{B}(\mathscr{A}))$的唯一概率测度 P,使 P 是 τ 的延拓.

定理 5.1.1[35]　设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间,$\mathscr{F}=\mathscr{B}(\mathscr{A})$,则对任给的 $\epsilon>0$

及 $F\in\mathscr{F}$，存在 $A\in\mathscr{A}$ 使得 $P(F\Delta A)<\varepsilon$，其中 $F\Delta A=(F\setminus A)\cup(A\setminus F)$.

注 5.1.1 当 $P(F\Delta A)<\varepsilon$ 时，有 $|P(A)-P(F)|<\varepsilon$. 事实上，由 $P(F)=P(F\setminus A)+P(F\cap A)$ 和 $P(A)=P(A\setminus F)+P(F\cap A)$，可得.

设函数 $f:\Omega\to\mathbf{C}$(或$\mathbf{R}$)是 $|f|^p$ 可积的，$p\geqslant 1$. 称 f 和 g 等价，若 $f=g(a,e)$. 用 $L^p(\Omega,\mathscr{F},P)$ 表示这些 p 方可积函数等价类的集合，按通常的方式定义数乘和加法，并按通常 L^p 空间的方式引入范数，使之成为 Banach 空间，简记为 $L^p(\Omega)$. 本章讨论实函数的情况.

定义 5.1.1 设$(\Omega_i,\mathscr{F}_i,P_i)$，$i=1,2$，是两个概率空间，

(1)称变换 $T:(\Omega_1,\mathscr{F}_1,P_1)\to(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P_2)$是可测的，若 $T^{-1}(\mathscr{F}_2)\subset\mathscr{F}_1$.

(2)称可测变换 T 是保测的，若 $P_1(T^{-1}A_2)=P_2(A_2)$，$\forall A_2\in\mathscr{F}_2$.

(3)称保测变换 T 是可逆的，若 T 是内射且 T^{-1}是保测的.

定理 5.1.2 设$(\Omega_i,\mathscr{F}_i,P_i)$是概率空间，$i=1,2$，$T:\Omega_1\to\Omega_2$，$\mathscr{S}_2$ 是生成 $\mathscr{F}_2$ 的半代数，如果 T 在 $\mathscr{S}_2$ 上是保测的，则 T 是保测变换.

证明 留作练习. □

本章讨论概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到自身的保测变换 T，这时称概率测度 P 是 T 不变的. $((\Omega,\mathscr{F},P),T)$构成一个半动力系统，即 $T:\mathbf{Z}_+\times\Omega\to\Omega$，称为随机动力系统. 有关实例可见文献[35,61].

§5.2 保测变换的度量熵

1948 年，C.E.Shannon[64]将熵的概念引入通信系统用以描述形式语言的概率不确定性，使"熵"成为描述信息系统"混乱程度"的重要工具. 而至 1958 年，Kolmogorov[65]在遍历理论中引进度量熵(测度论熵 Measuretheoretic Entropy)的概念(还可见文献[66])，也是遍历理论发展过程中的一个里程碑. 它不仅是描述系统复杂性和随机性的工具，而且解决了一系列随机动力系统的同构问题. 本节仅讨论度量熵与拓扑熵的关系，进一步的讨论可见文献[35, 63].

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间. 称子集族 $\xi=\{A_i\in\mathscr{F}\mid i=1,\cdots,k\}$是该空间上的一个有限分解，若

$$A_i\cap A_j=\varnothing,\qquad i\neq j \text{ 且 } \bigcup_{i=1}^{k}A_i=\Omega.$$

对于保测变换 $T:\Omega\to\Omega$，显然，子集族 $T^{-1}\xi=\{T^{-1}A_i\mid A_i\in\xi\}$也是该空间上的一个有限分解. 设 $\eta=\{B_j\in\mathscr{F}\mid k=1,\cdots,m\}$是另一个有限分解，类似于 §2.6，记

$$\xi\vee\eta=\{A_j\cap B_j\mid A_i\in\xi,B_j\in\eta\}.$$

又称 ξ 粗于 η(或 η 细于 ξ), 记为 $\xi<\eta$, 若对任一 $A_i\in\xi$, 存在子集 $J_i\subset\{1,2,\cdots,m\}$, 使

$$A_i=\bigcup_{j\in J_i}B_j.$$

在不计零测度意义下成立. 显然, $\xi\vee\eta$ 是一个有限分解, 且

$$\xi<\xi\vee\eta,\quad \eta<\xi\vee\eta.$$

下面约定 $0\cdot\log0=0$, 记

$$H_P(\xi)=-\sum_{i=1}^{k}P(A_i)\log P(A_i).\tag{5.2.1}$$

定义 5.2.1　称 $H_P(\xi)$为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上有限分解 ξ 的熵.

容易证明

命题 5.2.1　在如上记号下有

$$H_P(\xi)\leqslant\log k.$$

显然

$$\bigvee_{j=0}^{n-1}T^{-j}\xi=\xi\vee T^{-1}\xi\vee\cdots\vee T^{-(n-1)}\xi$$

是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个有限分解.

命题 5.2.2　对$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的有限分解 ξ 和保测变换 T, 如下极限存在

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}H_P\left(\bigvee_{j=0}^{n-1}T^{-j}\xi\right).$$

证明　首先, 利用 $P(A_i\cap B_j)\leqslant P(A_i)\cdot P(B_j)$, 有

$$\begin{aligned}H_P(\xi\vee\eta)&=-\sum_{i,j}P(A_i\cap B_j)\left[\log P(A_i)+\log\frac{P(A_i\cap B_j)}{P(A_i)}\right]\\&\leqslant H_P(\xi)+H_P(\eta).\end{aligned}\tag{5.2.2}$$

又由于 T 是保测变换, 由 $H_P(\xi)$的定义可得 $H_P(T^{-1}\xi)=H_P(\xi)$, 于是

$$H_P\left(\bigvee_{j=n}^{n+k-1}T^{-j}\xi\right)=H_P\left(T^{-n}\bigvee_{j=0}^{k-1}T^{-j}\xi\right)=H_P\left(\bigvee_{j=0}^{k-1}T^{-j}\xi\right).\tag{5.2.3}$$

记 $a_n=H_P\left(\bigvee_{j=0}^{n-1}T^{-j}\xi\right)$, 显然 $a_n\geqslant0$, 并由(5.2.2)和(5.2.3)可证

$$a_{n+m}\leqslant a_n+a_m.$$

于是, 利用引理 2.6.1 可证结论成立.　□

定义 5.2.2　称命题 5.2.2 中的极限

$$h(T,\xi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_P\left(\bigvee_{j=0}^{n-1}T^{-j}\xi\right)$$

为保测变换 T 关于有限分解 ξ 的熵; 而称

$$h(T)=\sup_{\xi}h(T,\xi)$$

为系统$((\Omega,\mathscr{F},P),T)$的度量熵, 其中 ξ 遍历 Ω 的所有有限分解.

类似定理 2.6.1, 有 $h(id)=0$;及类似(2.6.1)和(2.6.2)的结论成立.

定理 5.2.1 对于半动力系统$((\Omega,\mathscr{F},P),T)$,有

$$h(T^m)=m\cdot h(T),\quad \forall m\in\mathbf{N}. \tag{5.2.4}$$

更若 T 是可逆变换,则

$$h(T^m)=|m|\cdot h(T),\quad \forall m\in\mathbf{Z}. \tag{5.2.5}$$

证明 首先设 $m\in\mathbf{N}$,记 $\eta=\bigvee_{i=0}^{m-1}T^{-i}\xi$,易见

$$h(T^m,\eta)=\lim_{n\to\infty}\frac{m}{mn}H_P\left(\bigvee_{j=0}^{mn-1}T^{-j}\xi\right)=mh(T,\xi).$$

于是

$$\begin{aligned}mh(T)&=m\sup_\xi h(T,\xi)=\sup_\xi h(T^m,\eta)\\&\leqslant\sup_\eta h(T^m,\eta)=h(T^m).\end{aligned}$$

另一方面,由 $\xi<\eta$,类似于(2.6.2),有

$$h(T^m,\xi)\leqslant h(T^m,\eta)=mh(T,\xi),$$

可得 $h(T^m)\leqslant mh(T)$,联合前式有(5.2.4)成立.

下设 T 可逆,$m\in\mathbf{Z}$,于是

$$H_P\left(\bigvee_{j=0}^{m-1}T^j\xi\right)=H_P\left(T^{-m+1}\bigvee_{j=0}^{m-1}T^j\xi\right)=H_P\left(\bigvee_{j=0}^{m-1}T^{-j}\xi\right),$$

故 $h(T^{-1},\xi)=h(T,\xi)$,从而 $h(T^{-1})=h(T)$,再利用已证的(5.2.4)可证(5.2.5)成立. □

下面讨论度量熵与拓扑熵的关系.

设 X 是紧致度量空间,$T:X\to X$ 是同胚,利用 Riesz 表示定理,可以证明存在一个 T 不变的 Borel 测度[67,68],该测度定义在 X 的全体 Borel 子集上,从而得到一个概率空间.

定理 5.2.2[69] 设(X,f)是紧致拓扑动力系统,$f\in C^0(X,X)$,在 X 上存在关于 f 不变的正则 Borel 概率测度 P,则

$$h(f)\leqslant \mathrm{ent}(f).$$

证明 仍记$\mathscr{F}$为 X 上 Borel 子集生成的 σ 代数,$(X,\mathscr{F},P)$为概率空间. 设 $\xi=\{A_1,\cdots,A_k\}$是 X 上的一个有限分解. 选取 X 的相对紧子集 $B_j\subset A_j$, $j=1,\cdots,k$,作分解

$$\eta=\{B_1,\cdots,B_k,B_{k+1}\},$$

其中 $B_{k+1}=X-\bigcup_{i=1}^k\bar{B}_i$,使得对任一固定的 $m\in\mathbf{N}$,有

$$h(f^m,\xi)\leqslant h(f^m,\eta)+\alpha. \tag{5.2.6}$$

其中 α 是一个与 m 无关的充分大的自然数.

作 X 的开覆盖 $\mathscr{C}=\{C_1,C_2,\cdots,C_{k+1}\}$,其中

$$C_j = B_j \cup B_{j+1}, \quad C_{k+1} = B_{k+1}, j = 1, \cdots, k.$$

又记

$$p(\eta, \mathscr{C}) = \max_{C_j} \operatorname{card}\{B_i \in \eta \mid B_i \cap C_j \neq \varnothing\},$$

显然, $p(\eta, \mathscr{C}) = 2$.

由命题 5.2.1, 采用 § 2.6 中的记号, 可证

$$H_P\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-mj}\eta\right) \leqslant \log N\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-mj}\eta\right)$$

$$\leqslant H\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-mj}(\mathscr{C})\right) + n\log p(\eta, \mathscr{C}),$$

由此可得

$$h(f^m, \eta) \leqslant \operatorname{ent}(f^m, \mathscr{C}) + \log 2.$$

联合(5.2.6), 得

$$h(f^m, \xi) \leqslant \operatorname{ent}(f^m, \mathscr{C}) + \log 2 + \alpha,$$

先对右端, 再对左端分别按定义规定取上确界, 有

$$h(f^m) \leqslant \operatorname{ent}(f^m) + \log 2 + \alpha.$$

利用定理 2.6.2 和定理 5.2.1, 令 $m \to +\infty$ 可证结论成立. □

注 5.2.1 当强调 $h(f)$ 与 P 有关时, 记 $h(f)$ 为 $h(P; f)$. 定理 5.2.2 可加强为

$$\operatorname{ent}(f) = \sup_P h(P; f),$$

其中上确界遍历 X 上所有的 f 不变测度[70], 但存在上确界不可达的反例.

§ 5.3 遍历性与混合性

设 T 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的保测变换.

定义 5.3.1 称 $A \in \mathscr{F}$ 为 T 的不变集, 若 $T^{-1}A = A$; 称 A 为 T 的弱不变集, 若 $P(A \Delta T^{-1}A) = 0$, 其中 Δ 表示对称差.

显然, 不变集也是弱不变集.

定义 5.3.2 称概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的保测变换 T 是遍历的, 如果对每个不变集 $A \in \mathscr{F}$, 都有 $P(A) = 0$ 或者 $P(A) = 1$.

定理 5.3.1 设 T 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的保测变换, 则下列断言等价:

(1) T 是遍历的.

(2) $A \in \mathscr{F}$ 是弱不变集, 那么 $P(A) = 0$ 或 1.

(3) $A \in \mathscr{F}$ 且 $P(A) > 0$, 那么 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A) = 1$.

(4) $A, B \in \mathscr{F}$, 且 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 那么存在 $n > 0$ 使 $P(T^{-n}A \cap B) > 0$.

证明 (1)⇒(2) 设 $A\in\mathscr{F}$ 且 $P(T^{-1}A\Delta A)=0$. 由于

$$T^{-n}A\Delta A\subset\bigcup_{i=0}^{n-1}(T^{-i+1}A\Delta T^{-i}A)=\bigcup_{i=0}^{n-1}T^{-i}(T^{-1}A\Delta A),$$

及 T 是保测变换, 对每一 $n\in\mathbf{N}$, 有

$$P(T^{-n}A\Delta A)\leqslant nP(T^{-1}A\Delta A)=0,$$

即 $P(T^{-n}A\Delta A)=0$. 记 $A_n=\bigcup_{i=n}^{\infty}T^{-i}A$, 于是

$$P(A\Delta A_n)\leqslant\sum_{i=n}^{\infty}P(A\Delta T^{-i}A)=0.$$

记 $A_\infty=\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n$, 于是

$$P(A\Delta A_\infty)=P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}(A\Delta A_n)\right)=0,$$

即

$$P(A)=P(A_\infty). \tag{5.3.1}$$

显然 $T^{-1}A_\infty=A_\infty$, 由 T 的遍历性, 有 $P(A_\infty)=0$ 或 1; 再由(5.3.1)有 $P(A)=0$ 或 1.

(2)⇒(3) 设 $A\in\mathscr{F}$ 且 $P(A)>0$. 显然 $T^{-1}A_1\subset A_1$; 且由于 $P(T^{-1}A_1)=P(A_1)$, 故

$$P(T^{-1}A_1\Delta A_1)=0.$$

由结论(2), 有 $P(A_1)=0$ 或 1. 由于 $T^{-1}A\subset A_1$, 有

$$P(A_1)\geqslant P(T^{-1}A)=P(A)>0,$$

故 $P(A_1)=1$.

(3)⇒(4) 设 $P(A)>0, P(B)>0$. 由结论(3), 有 $P(A_1)=1$, 于是

$$0<P(B)=P(B\cap A_1)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B\cap T^{-n}A)\right),$$

从而存在 $n\in\mathbf{N}$ 使结论(4)成立.

(4)⇒(1) 设 $A\in\mathscr{F}$ 且 $T^{-1}A=A$. 如果 $0<P(A)<1$, 那么 $0<P(\Omega\setminus A)<1$, 于是

$$0=P(A\cap(\Omega\setminus A))=P(T^{-n}A\cap(\Omega\setminus A)),\quad\forall n\in\mathbf{N},$$

与结论(4)矛盾, 故 $P(A)=0$ 或 1, 即 T 是遍历的. □

注 5.3.1 由定理 5.3.1 可得遍历的等价定义: 称保测变换 T 是遍历的, 如果对每个弱不变集, 都有 $P(A)=0$ 或 1.

下面讨论混合性.

定义 5.3.3 设 T 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的保测变换,

(1)称 T 是弱混合的, 如果对任意的 $A,B\in\mathscr{F}$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|P(T^{-i}A\cap B)-P(A)P(B)|=0.$$

(2)称 T 是强混合的,如果对任意的 $A,B\in\mathscr{F}$,有

$$\lim_{n\to\infty}P(T^{-n}A\cap B)=P(A)\cdot P(B).$$

关于强混合的物理背景,在文献[61]第 342 页中有一生动的解释.

定理 5.3.2　设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是测度空间,$\mathscr{S}$是生成$\mathscr{F}$的半代数,$T:\Omega\to\Omega$ 是保测变换,那么

(1)T 是遍历变换当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}P(T^{-i}A\cap B)=P(A)P(B),\quad\forall A,B\in\mathscr{S}.\tag{5.3.2}$$

(2)T 是弱混合的当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|P(T^{-i}A\cap B)-P(A)P(B)|=0,\quad\forall A,B\in\mathscr{S}.$$

(3)T 是强混合的当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}P(T^{-n}A\cap B)=P(A)P(B),\quad\forall A,B\in\mathscr{S}.$$

证明　结论(2)和(3)的必要性是显然的,下证充分性.记半代数$\mathscr{S}$生成的代数为$\mathscr{A}(\mathscr{S})$.$\mathscr{A}(\mathscr{S})$中的每个元素是$\mathscr{S}$中有限个不交元的并,那么定理中的极限等式在$\mathscr{S}$上成立时,也一定在$\mathscr{A}(\mathscr{S})$上成立.

设 $A,B\in\mathscr{F}$.对任给的 $\varepsilon<0$,选择 $A_0,B_0\in\mathscr{A}(\mathscr{S})$使得

$$P(A\Delta A_0)<\varepsilon,\quad P(B\Delta B_0)<\varepsilon.$$

由于对任意的 $i\geqslant 0$,有

$$(T^{-i}A\cap B)\Delta(T^{-i}A_0\cap B_0)\subset(T^{-i}A\Delta T^{-i}A_0)\cup(B\Delta B_0),$$

可得

$$P((T^{-i}A\cap B)\Delta(T^{-i}A_0\cap B_0))<2\varepsilon,$$

因而,由注 5.1.1,有

$$|P(T^{-i}A\cap B)-P(T^{-i}A_0\cap B_0)|<2\varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned}&|P(T^{-i}A\cap B)-P(A)P(B)|\\ \leqslant&|P(T^{-i}A\cap B)-P(T^{-i}A_0\cap B_0)|+|P(T^{-i}A_0\cap B_0)\\ &-P(A_0)P(B_0)|+|P(A_0)P(B_0)-P(A)P(B_0)|+|P(A)P(B_0)\\ &-P(A)P(B)|\\ \leqslant&4\varepsilon+|P(T^{-i}A_0\cap B_0)-P(A_0)P(B_0)|.\end{aligned}$$

由此可证结论(2)和(3)成立.

下证结论(1).易见,对 $A,B\in\mathscr{F}$,存在 $A_0,B_0\in\mathscr{A}(\mathscr{S})$使得

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}P(T^{-i}A\cap B)-P(A)P(B)\right|$$
$$<4\varepsilon+\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}P(T^{-i}A_0\cap B_0)-P(A_0)P(B_0)\right|,$$

故只须证结论(1)在$\mathscr{F}$上成立. 首先, 设(5.3.2)在$\mathscr{F}$上成立. 设 A 是不变集, 在(5.3.2)中, 取 $A=B$, 有

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}P(T^{-i}A\cap A)=(P(A))^2,$$

故 $P(A)=0$ 或 1, 即 T 是遍历的.

其次, 设 T 是遍历的. 记 χ_A 为集合 A 的特征函数, 在后面提到的 Birkhoff 遍历定理中, 置 $f=\chi_A$, 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\chi_A(T^i(\omega))=P(A),\quad \text{a.e.}$$

或

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\chi_A(T^i(\omega))\chi_B(\omega)=P(A)\chi_B(\omega),\quad \text{a.e.}$$

利用有界收敛定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\chi_A(T^i(\omega))\chi_B(\omega)\right)=P(A)P(B),$$

其中 E 表示期望. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}P(T^{-i}A\cap B)=P(A)P(B)$$

在$\mathscr{F}$上成立, 从而(5.3.2)成立. □

注 5.3.2 由定理 5.3.2 易见, 强混合可推出弱混合, 弱混合可推出遍历. 反之, 则不然, 可见文献[35]. 下面进一步给出弱混合的等价条件.

称子集 $J\subset\mathbf{Z}_+$ 是零密度(density zero)的, 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\operatorname{card}(J\cap\{0,1,\cdots,n-1\})=0.$$

引理 5.3.1 设$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$是有界实数序列, 则下列断言等价

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|=0$.

(2)存在零密度集 $J\subset\mathbf{Z}_+$, 对一切 $n\notin J$ 且 $n\to\infty$ 时, $a_n\to 0$.

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|^2=0$.

证明 (1)⇒(2) 如果 $M\subset\mathbf{Z}_+$, 则记

$$\alpha_M(n)=\operatorname{card}(M\cap\{0,1,\cdots,n-1\}).$$

对 $k>0$, 记 $J_k=\{n\in\mathbf{Z}_+\mid |a_n|\geqslant 1/k\}$, 则 $J_1\subset J_2\subset\cdots$, 且

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{k}\alpha_{J_k}(n)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|,$$

即 J_k 是零密度的.故存在整数列 $0=I_0<I_1<I_2<\cdots$ 使得

$$\frac{1}{n}\alpha_{J_{k+1}}(n)<\frac{1}{k+1},\quad\forall n>I_k.\tag{5.3.3}$$

置

$$J=\bigcup_{k=0}^{\infty}\{J_{k+1}\cap[I_k,I_{k+1})\},$$

则 J 是零密度集.事实上,由 $J_1\subset J_2\subset\cdots$,当 $I_k\leqslant n<I_{k+1}$ 时,有

$$\begin{aligned}J\cap[0,n]&=[J\cap[0,I_k)]\cup[J\cap[I_k,n)]\\&\subset[J_k\cap[0,I_k)]\cup[J_{k+1}\cap[0,n)],\end{aligned}$$

再由(5.3.3),可得

$$\frac{1}{n}\alpha_J(n)\leqslant\frac{1}{n}[\alpha_{J_k}(I_k)+\alpha_{J_{k+1}}(n)]<\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}.$$

因而,当 $n\to\infty$ 时 $(1/n)\alpha_J(n)\to0$,即 J 是零密度的.如果 $n>I_k$ 且 $n\overline{\in}J$,那么 $n\overline{\in}J_{k+1}$,有

$$|a_n|<1/(k+1),$$

即结论(2)成立.

(2)⇒(1)　设 $\{|a_n|\}_{n=0}^{\infty}$ 的上界为 K.任给 $\varepsilon>0$,由结论(2),存在 $N_\varepsilon>0$,当 $n\geqslant N_\varepsilon$ 且 $n\overline{\in}J$ 时,$|a_n|<\varepsilon$;同时,可要求 N_ε 使 $n\geqslant N_\varepsilon$ 时,$(\alpha_J(n)/n)<\varepsilon$.于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|&=\frac{1}{n}\Big[\sum_{i\in J(n)}|a_i|+\sum_{i\overline{\in}J(n)}|a_n|\Big]\\&<\frac{K}{n}\alpha_J(n)+\varepsilon<(K+1)\varepsilon,\end{aligned}$$

其中 $J(n)=J\cap\{0,1,\cdots,n-1\}$.故结论(1)成立.

(1)⇒(3)　注意到 $n\overline{\in}J$ 且 $n\to\infty$ 时,$|a_n|\to0$,当且仅当 $|a_n|^2\to0$,即可. □

定理 5.3.3　设 T 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的保测变换,则下述断言等价

(1) T 是弱混合的.

(2)任给 $A,B\in\mathscr{F}$,存在零密度集 $J(A,B)\subset\mathbf{Z}_+$,当 $n\overline{\in}J(A,B)$ 且 $n\to\infty$ 时,$P(T^{-n}A\cap B)\to P(A)P(B)$.

(3)对一切 $A,B\in\mathscr{F}$,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|P(T^{-i}A\cap B)-P(A)P(B)|^2=0.$$

证明　记 $a_n=P(T^{-n}A\cap B)-P(A)P(B)$,利用引理 5.3.1,可证. □

§5.4 Lyapunov 指数

设 T 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的保测变换，$\{T^n\omega \mid n\in\mathbf{Z}_+\}$是从 $\omega\in\Omega$ 出发的一条轨道. $f:\Omega\to\mathbf{R}^1$ 是可测函数，称

$$\{f(\omega), f(T\omega), \cdots, f(T^n\omega), \cdots\}$$

是上述轨道的观察值. 一个重要的问题是其一段时间内的平均值

$$S_n(f)(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f(T^i\omega) \tag{5.4.1}$$

的渐近行为. 另一个重要问题是，$S_n(f)$是否渐近于空间平均

$$Ef(\omega) = \int f(\omega)\mathrm{d}P(\omega).$$

对这些问题的关注，导致遍历理论的研究. 早在 1909 年，博雷尔(Borel)在 Bernoulli 试验中建立第一个强大数定律，随后柯尔莫戈罗夫(Kolmogorov)就独立同分布的情况建立了相应的定理[71]. 在一般情况下的工作，一是泛函分析中半群算子的 Von Neuman 均方遍历定理[58]，另一是 1931 年 Birkhoff[72] 在几乎处处意义下的个别遍历定理. 1968 年，Kingman[73, 74]推广 Birkhoff 的工作，得到次可加遍历定理；而 Liggett[75]进一步减弱次可加条件，得到推广的次可加遍历定理. 在此基础上，可证明 Oseledets[76]乘法遍历定理(1965 年)，从而更一般地引入 Lyapunov 指数的概念和存在性的充分条件.

设算子 $U:L^1(\Omega)\to L^1(\Omega)$，对 $f\in L^1(\Omega)$，置

$$f_0 = 0, \quad f_n = f + Uf + \cdots + U^{n-1}f \quad (n\geqslant 1).$$

定理 5.4.1 (Hopf 极大遍历定理) $U:L^1(\Omega)\to L^1(\Omega)$是正线性算子，$\|U\|\leqslant 1$，若 $f\in L^1(\Omega)$有

$$F_N = \max_{0\leqslant n\leqslant N} f_n \geqslant 0,$$

记 $\Lambda_N = \{\omega\in\Omega \mid F_N(\omega)>0\}$，则

$$\int_{\Lambda_N} f(\omega)\mathrm{d}P(\omega) \geqslant 0.$$

证明 显然，$F_N\in L^1(\Omega)$，且对一切 $0\leqslant n\leqslant N$，$F_N\geqslant f_n$，由 U 是正线性算子，有

$$UF_N(\omega) + f(\omega) \geqslant Uf_n(\omega) + f(\omega) = f_{n+1}(\omega),$$

其中 $\omega\in\Lambda_N$，于是

$$UF_N(\omega) + f(\omega) \geqslant \max_{1\leqslant n\leqslant N+1} f_n(\omega) \geqslant F_N(\omega), \quad \forall\,\omega\in\Lambda_N.$$

注意到，在 Ω 上 $UF_N\geqslant 0$，在 $\Omega\setminus\Lambda_N$ 上 $F_N=0$，故

$$\int_{A_N} f(\omega)\mathrm{d}P(\omega) \geqslant \int_{A_N} (F_N(\omega) - UF_N(\omega))\mathrm{d}P(\omega)$$
$$= \int_{\Omega} F_N(\omega)\mathrm{d}P(\omega) - \int_{A_N} UF_N(\omega)\mathrm{d}P(\omega)$$
$$\geqslant \int_{\Omega} F_N(\omega)\mathrm{d}P(\omega) - \int_{\Omega} UF_N(\omega)\mathrm{d}P(\omega).$$

再由条件 $\|U\| \leqslant 1$,有结论成立. □

设 $g \in L^1(\Omega)$, $S_n(g)$ 如(5.4.1),对实数 $\alpha > 0$,记

$$B_\alpha(g) = B_\alpha = \{\omega \in \Omega \mid \sup_{n \geqslant 1} S_n(g)(\omega) > \alpha\}. \tag{5.4.2}$$

推论 5.4.1 设 $A \in \mathscr{F}$ 是 T 的不变集,则

$$\int_{B_\alpha \cap A} g(\omega)\mathrm{d}P(\omega) \geqslant \alpha P(B_\alpha \cap A).$$

证明 记 A 上的特征函数为 χ_A,令 $f = (g - \alpha)\chi_A$, $Uf = f \circ T$. 于是

$$f_n(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i\omega) = n(S_n(g)(\omega) - \alpha), \quad \forall \omega \in A,$$

其中 $\chi_A(T^i\omega) = 1$. 在

$$\left(\bigcup_{N=0}^{\infty} \{\omega \in \Omega \mid F_N(\omega) > 0\}\right) \cap A = B_\alpha \cap A$$

上应用定理 5.4.1,有结论成立. □

定理 5.4.2 (Birkhoff 逐点遍历定理) 设 $f \in L^1(\Omega)$,则存在 $f^* \in L^1(\Omega)$,使得

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(f)(\omega) = f^*(\omega)$, a.e. $\omega \in \Omega$.

(2) $f^* \circ T = f^*$, a.e..

(3) $\int_A f^* \mathrm{d}P = \int_A f\mathrm{d}P$, $\forall A \in \mathscr{F}, T^{-1}A = A$.

证明 首先,定义 f^* 并证结论(2). 设 $\omega \in \Omega$,记

$$f^*(\omega) = \limsup_{n \to \infty} S_n(f)(\omega),$$
$$f_*(\omega) = \liminf_{n \to \infty} S_n(f)(\omega).$$

由于

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(T\omega)) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(T^i\omega) - \frac{1}{n}f(\omega),$$

有 $f^* \circ T = f^*$,且 $f_* \circ T = f_*$.

其次,证结论(1). 对 $0 < \beta < \alpha$,置

$$E_{\alpha,\beta} = \{\omega \in \Omega \mid f_*(\omega) < \beta, f^*(\omega) > \alpha\},$$

是 T 的不变集. 取 $B_\alpha = B_\alpha(f)$ 如(5.4.2),易知 $E_{\alpha,\beta} \subset B_\alpha$. 在推论 5.4.1 中取

$A=\Omega$,有

$$\int_{E_{\alpha,\beta}} f\mathrm{d}P \geqslant \alpha P(E_{\alpha,\beta}).$$

再分别用 $-f$, $-\beta$ 和 $-\alpha$ 分别替换 f, α 和 β,重复上述过程,得

$$\int_{E_{\alpha,\beta}} f\mathrm{d}P \leqslant \beta P(E_{\alpha,\beta}).$$

由于前设 $\beta<\alpha$,故由上述两式

$$P(E_{\alpha,\beta}) = 0. \tag{5.4.3}$$

又置 $E^*=\{\omega\in\Omega \mid f_*(\omega)<f^*(\omega)\}$,有

$$E^* \subset \bigcup_{\beta<\alpha} E_{\alpha,\beta}.$$

取 α 和 β 为有理数,上式右端为可列并,联合(5.4.3)式,有 $P(E^*)=0$.从而

$$f_*(\omega) = f^*(\omega) \quad \text{a.e.} \quad \omega \in \Omega,$$

即结论(1)成立.

最后,证 $f^*\in L^1(\Omega)$及结论(3).由 Fatou 引理[34],有

$$\begin{aligned}\int |f^*(\omega)|\mathrm{d}P(\omega) &\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int |f(T^i\omega)|\mathrm{d}P(\omega)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int |f(\omega)|\mathrm{d}P(\omega)\\ &= \int |f(\omega)|\mathrm{d}P(\omega) < +\infty,\end{aligned}$$

即 $f^*\in L^1(\Omega)$.又对 $f\in L^1(\Omega)$在 Ω 上作分解

$$f = f^+ - f^-,$$

其中 f^+ 和 f^- 是非负函数,分别对其利用结论(1),记为

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f^{\pm})(\omega) = (f^{\pm})^*(\omega) \quad \text{a.e.} \quad \omega \in \Omega.$$

易见$(f^{\pm})^*=(f^*)^{\pm}$.对自然数 m,定义

$$f_m^{\pm}(\omega) = \begin{cases} f^{\pm}(\omega), & f^{\pm}(\omega) \leqslant m,\\ 0, & f^{\pm}(\omega) > m.\end{cases}$$

对其再利用结论(1),同样有

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f_m^{\pm})(\omega) = (f_m^*)^{\pm}(\omega) \quad \text{a.e.} \quad \omega \in \Omega. \tag{5.4.4}$$

显然,$f_m^{\pm}$ 和$(f_m^*)^{\pm}$分别单调收敛于 $f^{\pm}$和$(f^*)^{\pm}$,且

$$0 \leqslant S_n(f_m^{\pm})(\omega) \leqslant m.$$

对(5.4.4)在 Ω 上利用 Lebesgue 控制收敛定理[34],得

$$\int (f_m^*)^{\pm}\,\mathrm{d}P = \lim_{n\to\infty}\int \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_m^{\pm}(T^i\omega)\mathrm{d}P(\omega)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int f_m^{\pm}(\omega) \mathrm{d}P(\omega)$$

$$= \int f_m^{\pm} \mathrm{d}P.$$

再由其单调收敛性,有

$$\int (f^*)^{\pm} \mathrm{d}P = \int f^{\pm} \mathrm{d}P.$$

从而

$$\int f^* \mathrm{d}P = \int f \mathrm{d}P. \tag{5.4.5}$$

对 $A \in \mathscr{F}, A = T^{-1}A$,记 χ_A 为其特征函数.置

$$g(\omega) = f(\omega)\chi_A(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

由结论(1),有

$$g^*(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i\omega)\chi_A(T^i\omega) = f^*(\omega)\chi_A(\omega), \ \text{a.e.}$$

对 g 和 g^* 在 Ω 上利用(5.4.5),即结论(3)成立,证毕. □

推论 5.4.2　当 T 遍历时,f^* 几乎处处是常数,且 $f^*(\omega) = E(f(\omega))$ 几乎处处成立.

利用 Birkhoff 定理可以证明下面的 Von Neumann 遍历定理.

定理 5.4.3 (Von Neumann L^p 遍历定理)　设 $1 \leqslant p < \infty$,如果 $f \in L^p(\Omega)$,则存在 $f^* \in L^p(\Omega)$ 使得 $f^* \circ T = f^*$,且

$$\lim_{n\to\infty} \| S_n(f) - f^* \|_p = 0. \tag{5.4.6}$$

证明　设 g 是有界可测函数,则 $g \in L^p(\Omega)$. 由定理 5.4.2,存在 $g^* \in L^\infty(\Omega)$,从而 $g^* \in L^p(\Omega)$,使得

$$\lim_{n\to\infty} S_n(g)(\omega) = g^*(\omega) \ \text{a.e.} \ \omega \in \Omega$$

或者

$$\lim_{n\to\infty} | S_n(g)(\omega) - g^*(\omega) |^p = 0 \ \text{a.e.} \ \omega \in \Omega.$$

按照有界收敛定理,有

$$\lim_{n\to\infty} \| S_n(g) - g^* \|_p = 0.$$

任给 $\varepsilon < 0$,存在自然数 $N(\varepsilon, g)$,对一切 $k > 0$ 有

$$\| S_n(g) - S_{n+k}(g) \|_p < \varepsilon/2, \quad \forall n > N(\varepsilon, g).$$

设 $f \in L^p(\Omega)$,有 $\| S_n(f) \|_p \leqslant \| f \|_p$. 选取 $g \in L^\infty(\Omega)$ 使 $\| f - g \|_p < \varepsilon/4$,故

$$\| S_n(f) - S_{n+k}(f) \|_p$$
$$\leqslant \| S_n(f) - S_n(g) \|_p + \| S_n(g) - S_{n+k}(g) \|_p$$

$$+\ \| S_{n+k}(g) - S_{n+k}(f) \|_p \leqslant \varepsilon.$$

即$\{S_n(f)\}$是完备空间 $L^p(\Omega)$中的 Cauchy 列,故存在 $f^* \in L^p(\Omega)$使(5.4.6)成立.再由

$$\frac{n+1}{n} \cdot S_{n+1}(f)(\omega) = S_n(f)(T\omega) + \frac{1}{n} f(\omega),$$

利用定理 5.4.2,有 $f^* \circ T = f^*$ 成立. □

定义 5.4.1 设 T 是$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的保测变换,称实值可测函数列$\{f_n | n \in \mathbf{Z}_+\}$是次可加的,若对任意 $n, k \in \mathbf{Z}_+$,有

$$f_{n+k} \leqslant f_n + f_k \circ T^n \qquad \text{a.e.}$$

定理 5.4.4 (Kingman 次可加遍历定理) 设$\{f_n | n \in \mathbf{Z}_+\}$是 $L^1(\Omega)$中的次可加函数列,若存在 $M>0$,对一切 $n \in \mathbf{Z}_+$ 有

$$\frac{1}{n}\int f_n \mathrm{d}P > -M,$$

则存在 T 不变的函数 $f \in L^1(\Omega)$,满足

(1) $f \circ T = f$ a.e.

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} f_n = f$ a.e.

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n}\int_A f_n \mathrm{d}P = \int_A f \mathrm{d}P = \inf\limits_n \frac{1}{n}\int_A f_n \mathrm{d}P$,其中 $A \in \mathscr{A}$, $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}$是 T 不变集生成的 σ 子代数.

证明 见文献[60,74,75]. □

推论 5.4.3 设$\{f_n | n \in \mathbf{Z}_+\}$是次可加函数列,且 $f_1^+ \in L^1(\Omega)$,则存在 T 不变可测函数 f,使得 $f^+ \in L^1(\Omega)$且满足定理 5.4.4 的结论(1)~(3).

证明 由 $f_1^+ \in L^1(\Omega)$及定义 5.4.1 归纳可证 $f_n^+ \in L^1(\Omega)$.对 $m \in \mathbf{N}$,置

$$f_{n,m}(\omega) = \max\{f_n(\omega), -n \cdot m\},$$

则 $f_{n,m} \in L^1(\Omega)$,且随 m 单调下降.对 $f_{n,m}$应用定理 5.4.4 和 Levi 引理(单调收敛定理[34]),可证结论成立. □

下面讨论乘法遍历定理,其中用到张量分析的知识,可参看文献[77,78].

记 $\mathbf{R}^m$ 中 q 个向量 $u_1, \cdots, u_q$ 的外积为 $u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_q$.所有 q 个向量的外积张成的线性空间,称为 $\mathbf{R}^m$ 的 q 阶外幂空间,记为 $\wedge^q \mathbf{R}^m$.它是一个欧氏空间,其一组标准正交基是

$$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_q} | 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_q \leqslant m\},$$

其中 $e_1, \cdots, e_m$ 是 $\mathbf{R}^m$ 的一组标准正交基.这里,采用内积

$$(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_q}, e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_q}) = \delta_{i_1,j_1} \cdot \delta_{i_2,j_2} \cdots \delta_{i_q,j_q},$$

其中

$$\delta_{i_\alpha,j_\alpha}=\begin{cases}1, & i_\alpha=j_\alpha,\\ 0, & i_\alpha\neq j_\alpha.\end{cases}$$

对任一 $u\in\wedge^q\mathbf{R}^m$,通过上述基底表示为

$$u=\sum_{i_1<\cdots<i_q}a_{i_1\cdots i_q}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_q},$$

于是

$$\|u\|=\Big(\sum_{i_1<\cdots<i_q}a^2_{i_1\cdots i_q}\Big)^{1/2}.$$

简记 $L(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^m)$ 为 $L(\mathbf{R}^m)$,对 $A\in L(\mathbf{R}^m)$ 定义映射

$$A^{\wedge^q}:\wedge^q\mathbf{R}^m\to\wedge^q\mathbf{R}^m$$

为下式的线性扩张

$$A^{\wedge^q}(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_q})=Ae_{i_1}\wedge\cdots\wedge Ae_{i_q}.$$

引理 5.4.1 [79]　对 $\{A_n\mid n\in\mathbf{Z}_+\}\subset L(\mathbf{R}^m)$,记 $A^n=A_n\circ A_{n-1}\circ\cdots\circ A_1$,若 $\limsup\limits_{n\to\infty}(1/n)\log\|A_n\|\leqslant 0$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|(A^n)^{\wedge^q}\|,$$

对一切 $q=1,2,\cdots,m$ 均存在,则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(A^{n*}A^n)^{1/(2n)}=\Lambda$ 存在.

(2)记 Λ 互不相同的特征值及对应的特征子空间分别为 $\exp\chi_1<\exp\chi_2<\cdots<\exp\chi_s$ 和 $E_1,E_2,\cdots,E_s$,其中 χ_i 为实数且 $\chi_1\geqslant-\infty$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|A^nu\|=\chi_i,\quad\forall\,0\neq u\in E_i.$$

记映射 $A:\mathbf{Z}_+\times\Omega\to L(\mathbf{R}^m)$ 定义的 $A(n,\omega)\in L(\mathbf{R}^m)$ 为 $A^n(\omega)$ 或 A^n_ω.类似地,下面简记各种符号 $M(\omega)$ 为 M_ω.

定义 5.4.2　称由映射 $A:\mathbf{Z}_+\times\Omega\to L(\mathbf{R}^m)$ 定义的序列 $\{A^n(\omega)\mid n\in\mathbf{Z}_+\}$ 为 Ω 上关于 T 的上闭链,若

$$A^{n+k}(\omega)=A^n(T^k(\omega))\circ A^k(\omega),\quad\forall\,n,k\in\mathbf{Z}_+.$$

显然,对上闭链有

$$A^n(\omega)=A^1(T^{n-1}\omega)\circ A^1(T^{n-2}\omega)\circ\cdots\circ A^1(\omega).\tag{5.4.7}$$

定义 5.4.3　称上闭链 $\{A^n(\omega)\}$ 可测,若它们作为从 $\mathbf{Z}^+\times\Omega$ 到 $L(\mathbf{R}^m)$ 的映射可测.

定理 5.4.5 (乘法遍历定理)　设 $\{A^n_\omega\}$ 是可测上闭链,且 $\log^+\|A^1(\cdot)\|\in L^1(\Omega)$,则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(A^{n*}_\omega A^n_\omega)^{1/(2n)}=\Lambda_\omega$,几乎处处存在.

(2)记 A_ω 互不相同的特征值及其相应的特征子空间分别为 $\exp\chi_{1\omega}<\cdots<\exp\chi_{s(\omega)\omega}$ 和 $E_{1\omega},\cdots,E_{s(\omega)\omega}$，其中 $\chi_{i\omega}\in\mathbf{R}$ 且 $\chi_{1\omega}\geqslant-\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|A_\omega^n u\|=\chi_{i\omega},\quad\forall 0\neq u\in E_{i\omega}.$$

证明 首先，核验引理5.4.1的第一个条件. 在(5.4.7)式中，记 $A_n=A^1(T^{n-1}\omega)$，以 $\{A_n\}$ 作为该引理中的 $\{A_n|n\in\mathbf{Z}_+\}\subset L(\mathbf{R}^m)$. 由于 T 保测且 $\log^+\|A^1(\cdot)\|\in L^1(\Omega)$，故 $\log^+\|A^1(T^i\omega)\|$ 对一切 $i\in\mathbf{Z}_+$ 几乎处处一致有界，故

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|A_n\|\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log^+\|A^1(T^{n-1}\omega)\|=0\quad\text{a.e.}$$

即满足第一个条件. 注意到(5.4.7)，下面只需对 A_ω^n 核验第二个条件.

考虑 Ω 上的函数列 $\{\log\|(A^n(\cdot))^{\wedge^q}\|\,|\,n\in\mathbf{Z}_+\}$. 由于，$A^{n+k}(\omega)=A^k(T^n\omega)\circ A^n(\omega)$，故

$$(A^{n+k}(\omega))^{\wedge^q}=(A^k(T^n\omega))^{\wedge^q}\circ(A^n(\omega))^{\wedge^q},\quad q=1,2,\cdots,m.$$

故由定义 5.4.1 可证该函数列是次可加的. 又设 m 个实数 $\lambda_{1\omega}\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{m\omega}$ 是 $(A^{1*}(\omega)A^1(\omega))^{1/2}$ 的特征值，则

$$\|A^1(\omega)\|=\lambda_{m\omega},\quad\|(A^1(\omega))^{\wedge^q}\|=\prod_{i=m-q+1}^{m}\lambda_{i\omega}.$$

于是，可由 $\log^+\|A^1(\cdot)\|\in L^1(\Omega)$ 推出

$$\log^+\|(A^1(\cdot))^{\wedge^q}\|\in L^1(\Omega),\quad q=1,2,\cdots,m.$$

对该函数列应用推论 5.4.3，可证极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|(A^n(\omega))^{\wedge^q}\|,\quad q=1,2,\cdots,m$$

几乎处处存在. 从而，由引理 5.4.1 知定理的结论成立. □

定义 5.4.4 设 $\{A^n(\omega)\}$ 是 Ω 上关于保测变换 T 的上闭链，$u\in\mathbf{R}^m$，若极限

$$\chi_+(\omega,u)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|A^n(\omega)u\|$$

存在，则称 $\chi_+(\omega,u)$ 为点 ω 处向量 u 关于 (T,A) 的 Lyapunov 指数；若对一切 $u\in\mathbf{R}^m$，该指数都存在，则称 ω 为正则点.

命题 5.4.1 设 $\{A^n(\omega)\}$ 是 Ω 上关于保测变换 T 的上闭链，则

(1) $\chi_+(\omega,cu)=\chi_+(\omega,u)$，$\forall c\neq 0$.

(2) $\chi_+(\omega,c_1u_1+c_2u_2)\leqslant\max\{\chi_+(\omega,u_1),\chi_+(\omega,u_2)\}$.

(3) (T,A) 至多有 m 个不同的 Lyapunov 指数.

证明 只证(3). 若其不然，设有 $m+1$ 个 Lyapunov 指数满足

$$\chi_{+}(\omega, u_1) < \chi_{+}(\omega, u_2) < \cdots < \chi_{+}(\omega, u_{m+1}),$$

其中 $u_j \in \mathbf{R}^m, j = 1, \cdots, m+1$. 由其线性相关,应存在一个 j,使

$$u_{j+1} = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_j u_j.$$

利用结论(2)可证 $\chi_{+}(\omega, u_{j+1}) \leqslant \chi_{+}(\omega, u_j)$,与前设矛盾,故结论成立. □

有关 Lyapunov 指数的应用,可参考相关文献.

第六章　微分拓扑

微分拓扑属于大范围分析的范畴，是 20 世纪最富有成就和影响的数学分支之一．在本书中，是第八章及以后内容的基本工具．关于这方面的主要参考书有文献[80]，[81]，[82]．

§6.1　微分流形

流形是一种特殊的拓扑空间，是对欧氏空间中一些曲面的“局部欧氏”这一本质属性的抽象．所谓“局部欧氏”，就是将流形上每一点的附近与欧氏空间（或欧氏空间中的开集）同胚．拓扑流形的概念，最早是 Riemann 在 1854 年的就职演讲中提出来的；而微分流形的概念，最早是 H. Weyl 在 1912 年提出的．但完善这一概念的是 1936 年 H. Whitney 的工作[83]．

定义 6.1.1　设 M 是满足第二可数公理的 Hausdorff 拓扑空间，Γ 是一指标集，若 $\{U_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ 是 M 的一个开覆盖，且对每一 U_α，存在同胚映射 φ_α: $U_\alpha \to U_\alpha'$，U_α' 为线性赋范空间 E 的开子集，则称 M 为一拓扑流形，$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 称为 M 的一个图，所有图的集合称为 M 的一个图集，或流形构造，记为 $\mathscr{D}_0$；特别，若 $E = \mathbf{R}^m$，则称 M 为 m 维拓扑流形，这时，图 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 又称为局部坐标系，$\mathscr{D}_0$ 又称为 M 的坐标复盖．

设 M 是 m 维拓扑流形，$(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathscr{D}_0$，$p \in U_\alpha$ 则

$$\varphi_\alpha(p) = (\varphi_\alpha^1(p), \cdots, \varphi_\alpha^m(p)) \in \mathbf{R}^m,$$

称为点 p 在局部坐标系 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 中的局部坐标．

又设 $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathscr{D}_0$，当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时，映射

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

和

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

有意义且互为同胚逆，称为这两个局部坐标系之间的传递函数．

根据区域不变性定理，当 $n \neq m$ 时，$\mathbf{R}^n$ 中的开集不可能同胚于 $\mathbf{R}^m$ 中的开集[84]．于是拓扑流形的维数是一个确定的数值．

若 M 是紧致的拓扑流形，则必存在一个由有限成员构成的坐标覆盖 $\mathscr{D} \subset \mathscr{D}_0$，且 $\mathscr{D}$ 中的成员个数必定大于 1，因为一个紧拓扑空间不可能与一个非紧的欧氏空间中的开集同胚．从而，一个紧拓扑流形不可能有一个整体坐标系．

定义 6.1.2　设 M 是 m 维拓扑流形

(1) $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathscr{D}_0$. 若 $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$，或当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时，$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}, \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^r (1 \leqslant r < \infty, \omega)$，则称 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 与 (U_β, φ_β) 是 C^r 相容的.

(2)设 $\mathscr{D} \subset \mathscr{D}_0$，若 $\mathscr{D}$ 中任何两个图是 C^r 相容的，则称 $\mathscr{D}$ 是 C^r 相容的.

(3)若 $\mathscr{D} \subset \mathscr{D}_0$, $\mathscr{D} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \Gamma\}$，$\Gamma$ 是一指标集. 且满足：

1° $\mathscr{D}$ 是 M 的坐标覆盖，即 $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha = M$.

2° $\mathscr{D}$ 是 C^r 相容的.

3° $\mathscr{D}$ 是极大的，即 $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathscr{D}_0$ 与 $\mathscr{D}$ 是 C^r 相容时，有 $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathscr{D}$.

则称 $\mathscr{D}$ 是 M 上的一个 C^r 微分构造(或饱和图集)，称 $(M, \mathscr{D})$ 为一个 m 维的 C^r 微分流形，特别对 C^∞ 称其为光滑流形，对 C^ω 称其为解析流形.

并不是任何一个拓扑流形均存在微分构造，M. A. Kervaire[85]在 1960 年构造了一个十维的拓扑流形，证明在该流形上不存在微分构造. 另外，在同一个流形上也可能存在两个不同的微分构造使其微分流形不是微分同胚的，例如，J. Milnor[86]在 1956 年给出一个七维球面的例子. 但是，有如下定理.

定理 6.1.1　有如下结论成立：

(1)设图集 $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 是流形 M 的 C^r 图集，则它唯一地确定了流形 M 的 C^r 微分构造：

$$B = \{(U, \varphi) \mid \forall (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in A, \varphi_\alpha \varphi^{-1} \text{ 与 } \varphi \varphi_\alpha^{-1} \text{ 是 } C^r \text{ 的}\}.$$

(2)设 $A_1 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, $A_2 = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ 为流形 M 的 C^r 图集，且 A_1 与 A_2 的元素彼此 C^r 相容，则由 A_1, A_2 确定的可微结构是相同的.

证明　证明留作练习. □

定义 6.1.3　设 $(M, \mathscr{D})$ 是 m 维微分流形，$f: M \to \mathbf{R}$ 是 M 上的实函数.

(1)设 $p \in M$，若存在 $(U, \varphi) \in \mathscr{D}$, $p \in U$ 使得

$$f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \mathbf{R} \in C^r,$$

则称 f 在点 p 是 C^r 函数.

(2)若 f 在 M 上每一点都是 C^r 函数的，则称 f 是 M 上的 C^r 函数，其全体记为 $C^r(M)$.

定义 6.1.4　设 $(M, \mathscr{D}_1)$, $(N, \mathscr{D}_2)$ 分别是 m 维和 n 维微分流形，$f: M \to N$ 是映射.

(1)设 $p \in M$，若对于 $f(p) \in N$ 的每一个局部坐标系 $(V_\beta, \psi_\beta) \in \mathscr{D}_2$，存在点 p 的某个局部坐标系 $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathscr{D}_1$ 使得 $f(U_\alpha) \subset V_\beta$，且

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \psi_\beta(V_\beta) \in C^r,$$

则称 f 在点 p 是 C^r 可微的.

(2)若 f 在 M 的每一点上都是 C^r 可微的，则称 f 为 C^r 映射，从 M 到 N

的 C^r 映射的全体记为 $C^r(M,N)$，特别，C^∞映射称为光滑映射.

定义 6.1.5 设 M,N 为 C^r 流形，$f:M\to N$ 同胚，若 $f,f^{-1}\in C^r$，则称 f 为 C^r 微分同胚. 若 M,N 间存在 C^r 微分同胚，则称 M 和 N 是微分同胚的.

定义 6.1.6 设 $\varphi_\alpha(p)=(\varphi^1(p),\cdots,\varphi^m(p))$，$q=f(p)$，$\psi_\beta(q)=(\psi^1(q),\cdots,\psi^n(q))$，记 $x_i=\varphi^i(p)$，$y_j=\psi^j(q)$，$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$。称

$$D(\psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(p)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_m}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_m}\end{pmatrix}_{\varphi_\alpha(p)}=\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)_{\varphi_\alpha(p)}$$

为 C^r 映射 f 在点 p 关于局部坐标 $\{x_i\}$，$\{y_j\}$ 的 Jacobi 矩阵，其秩

$$\operatorname{rank} D(\psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(p)}$$

为 f 在点 p 的秩，记为 $(\operatorname{rank}f)_p=\operatorname{rank}D(\psi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(p)}$；显然 $(\operatorname{rank}f)_p$ 与坐标图的选取无关，且

$$(\operatorname{rank}f)_p\leqslant\min(m,n).$$

从 $\mathbf{R}^m$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的一个线性映射在取定的基下可以表示成一个矩阵 A. 这个矩阵中，不为零的子行列式的阶数最大者称为线性算子 A 的秩数. 下面将欧氏空间中的秩数定理用局部坐标系语言直接改写到微分形上.

定理 6.1.2 设 f 是 m 维微分流形 M 到 n 维微分流形 N 的光滑映射，若在点 $p\in M$ 的某邻域内 $\operatorname{rank}f=d$，则存在含 p 和 $g=f(p)$ 的局部坐标系 (U,φ) 和 (V,ψ)，使得 f 的局部表示 $\hat{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 将 $\mathbf{R}^m$ 中零的邻域映射为 $\mathbf{R}^n$ 中零的适当邻域，且使 $\hat{f}$ 在所取局部坐标系下成为 $\hat{f}(u^1(p),\cdots,u^m(p))=(u^1(p),\cdots,u^d(p),0,\cdots,0)$，其中 $\varphi=(u^1,u^2,\cdots,u^m)$.

定义 6.1.7 设 M 和 N 分别是 m 维和 n 维微分流形，$f:M\to N$ 是 C^k 映射，点 $p\in M$，若

$$(\operatorname{rank}\ f)_p=m(m\leqslant n),$$

则称 f 在点 p 为局部 C^k 浸入(immersion)；更若 f 在 M 中每点均为局部 C^k 浸入，则称 f 为 C^k 浸入；若

$$(\operatorname{rank}\ f)_p=n(m\geqslant n)$$

则称 f 在点 p 为局部 C^k 浸没(submersion)，更若 f 在 M 中每点均为局部 C^k 浸没，则称 f 为 C^k 浸没；若 C^k 浸入 $f:M\to f(M)$ 为单射(同胚)则称 f 为 C^k 嵌入(正则嵌入).

例 6.1.1 投影 $\pi:M_1\times M_2\to M_2\triangleq\pi:(p_1,p_2)\mapsto p_2$，点 p_2 的原像集

合 $M_1 \times \{p_2\}$同胚于 M_1,称 π 为投影浸没.

例 6.1.2 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2 \triangleq f(x)=(\sin x, \sin 2x)$是 C^∞浸入,$(\text{rank} f)_x = 1$, $\forall x\in\mathbf{R}$.但 $f(R)$不是 R^2的子流形.

定理 6.1.3 设 M 紧致,$f:M\to N$ 为C^k 单射浸入,则 f 为C^k 嵌入.

证明 $f:M\to f(M)$为双射,故 f^{-1}在 $f(M)$上存在.只须证 f^{-1}连续,即要证 f 将M 中的开集映为$f(M)$中的开集(开映射).而 f 是双射,故等价于 f 是闭映射.设 C 是M 中的闭集.而 M 紧致,故 C 是M 中的紧集.因而 $f(C)$为紧,而 $f(M)$为 Hausdoff 空间,故 $f(C)$是闭. □

设$(N,\mathscr{D}')$与$(M,\mathscr{D})$分别是 n 和 m 维的微分流形,且 $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^{n-m}$.

定义 6.1.8 设 $M\subseteq N$,称$(M,\mathscr{D})$为$(N,\mathscr{D}')$的 m 维C^∞正则子流形,若$(M,\mathscr{D})$满足如下条件:

1° M 是N 的拓扑子空间.

2° 对每一点 $p\in M$,存在含 p 点的图$(U,\varphi)\in\mathscr{D}'$,$\varphi:U\to\mathbf{R}^n$ 使

$$\varphi(U\cap M)=\varphi(U)\cap(\mathbf{R}^m\times\{0\})\subset\mathbf{R}^m\times\{0\},$$

且$(U\cap M,\varphi|_{U\cap M})\in\mathscr{D}_p$.

定义 6.1.9 $F:M\to N\in C^\infty$,若

1° $F(M)$是 N 的m 维C^∞正则子流形.

2° $F:M\to F(M)$是微分同胚.

则称$(M;F)$为 N 的m 维C^∞正则嵌入子流形.

定理 6.1.4 设 $M\subseteq N$,则 M 是N 的C^∞正则子流形,当且仅当包含映射 $i:M\to N$ 是C^∞正则嵌入.

证明 ($\Rightarrow$) 设 i 是包含映射,则 $i:M\to i(M)$是同胚.任取 $p\in M$,存在$(U,\varphi)\in\mathscr{D}'_p$,使$(U\cap M,\varphi|_{U\cap M})\in\mathscr{D}_p$.由此易证 $i:M\to N\in C^\infty$且 $\text{rank}\, i_p = m$,于是包含映射 $i:M\to N$ 为C^∞正则嵌入.

($\Leftarrow$) 设包含映射 $i:M\to N$ 是C^∞正则嵌入.要证 M 是C^∞正则子流形.

首先,i 是包含映射,则 $i:M\to i(M)$是同胚,故 M 是N 的拓扑子空间.

其次,对任何 $p\in M$,由 rank $i_p=m$ 及秩数定理,存在图$(U,\varphi)\in\mathscr{D}_p$ 与$(V,\psi)\in\mathscr{D}'_p$ 使$i(U)\subset V$,且

$$i:(u^1(p),\cdots,u^m(p))\mapsto(u^1(p),\cdots,u^m(p),0,\cdots,0).$$

由于 M 是N 的拓扑子空间,对 M 中的开集U,存在 N 中的开集 V',使 $U=V'\cap M$,记 $V_0=V'\cap V$,则$(V_0,\psi|_{V_0})\in\mathscr{D}'_p$ 且$\psi|_{V_0\cap M}=\varnothing$,取 $U_0=V_0\cap M\subset U$,则

$$(V_0\cap M,\psi|_{V_0\cap M})=(U_0,\varphi)\in\mathscr{D}_p$$

与

$$\psi(V_0 \cap M) = \psi(V_0) \cap \mathbf{R}^m$$

成立,其中将 $\mathbf{R}^m$ 等同于 $\mathbf{R}^m \times \{0\}$,故 M 是 N 的 C^∞ 正则子流形. □

定理 6.1.5 若 $F:M \to N \in C^\infty$,则 $(M;F)$ 是 N 的 C^∞ 正则嵌入子流形当且仅当 $F:M \to N$ 是正则嵌入映射.

证明 ($\Rightarrow$) 设 $(M;F)$ 是 N 的 C^∞ 正则嵌入子流形,于是,由定义 6.1.9 知 $F(M)$ 是 N 的 C^∞ 正则子流形,且 $F:M \to F(M)$ 是微分同胚.前者等价于包含映射 $i:F(M) \to N$ 是正则嵌入,后者等价于 $F:M \to F(M)$ 是正则嵌入且满射.故 $i \circ F:M \to N$ 是正则嵌入,即 $F:M \to N$ 是正则嵌入.

($\Leftarrow$) 设 $F:M \to N$ 是正则嵌入,即浸入且同胚.

首先,$F:M \to F(M) \subset N$ 是同胚映射,可以将 M 上的微分构造自然转移到 $F(M)$ 上,使 $F(M)$ 成为与 M 在映射 F 下微分同胚的微分流形.记这个微分同胚逆为 $G:F(M) \to M$.

其次,$i = F \circ G: F(M) \to N$. F 是正则嵌入,G 是微分同胚(这等价于正则嵌入且满射),故 i 是正则嵌入,由定理 6.1.4 推出 $F(M)$ 是 N 的正则子流形.由定义 6.1.9 知 $(M;F)$ 是 N 的 C^∞ 正则嵌入子流形. □

下面适当放宽正则性的要求.

定义 6.1.10 称 (M,F) 为 N 的 C^∞ 嵌入子流形,若 $F:M \to N$ 是 C^∞ 嵌入.特别,当 $M \subset N$,若包含映射 $i:M \to N$ 是 C^∞ 嵌入,则称 M 为 N 的 C^∞ 子流形.

正则嵌入子流形是嵌入子流形的特例.当 M 是 N 的子集合时,M 是 N 的正则子流形要求 M 上的拓扑一定是 N 上的诱导拓扑,而 M 是 N 的子流形则不必如此.当 M 是紧流形时,这两个概念并无差别.

定理 6.1.6 设 M 和 N 是两个微分流形,若 M 是紧的,则 $F:M \to N$ 是 C^∞ 嵌入的充分必要条件是 $F:M \to N$ 是 C^∞ 正则嵌入.

证明 只证必要性.设 $F:M \to N$ 是 C^∞ 嵌入,则 $F(M)$ 作为 N 的拓扑子空间是 Hausdorff 空间,由[87]:"由紧拓扑空间到 Hausdorff 空间的连续满单射必是同胚."知 $F:M \to F(M)$ 是同胚,故为 C^∞ 正则嵌入. □

定理 6.1.7 (Whitney 嵌入定理) 任何一个 m 维微分流形总可正则嵌入到欧氏空间 $\mathbf{R}^{2m+1}$ 中,并成为 $\mathbf{R}^{2m+1}$ 中的闭子集.

§6.2 切空间与余切空间

设 M 或 $(M,\mathscr{D})$ 是 m 维微分流形,$p \in M$,N 是 n 维微分流形.

定义 6.2.1 记 $C^\infty(p) = \{f \in C^\infty: U_f \to \mathbf{R} \mid U_f$ 是点 p 的开邻域$\}$,

(1)设 $f,g\in C^{\infty}(p)$,按通常方法引入加法、数乘和乘法运算,其加法、乘法的定义域规定为 $U_f\cap U_g$.

(2)在 $C^{\infty}(p)$中引入等价关系"~"如下,$f\sim g\Leftrightarrow$存在点 p 的邻域 U,使 $f|_U=g|_U$,记该等价关系导入的商空间为 $C^{\infty}(p)/\sim$,其加法、数乘、乘法由 $C^{\infty}(p)$中的相应运算自然诱导而出;即

$$[f]+[g]=[g+f],\quad \forall[f],[g]\in C^{\infty}(p)/\sim,$$
$$c[f]=[cf],\quad \forall[f]\in C^{\infty}(p)/\sim,c\in \mathbf{R},$$
$$[f]\cdot[g]=[f\cdot g],\quad \forall[f],[g]\in C^{\infty}(p)/\sim.$$

由上述定义,易知 $C^{\infty}(p)$和 $C^{\infty}/\sim$按加法与数乘构成实线性空间,且乘积运算使其成为环.

定义 6.2.2　若函数 $X_p:C^{\infty}(p)\to\mathbf{R}$ 具有性质:

(1)$X_p(f+g)=X_p(f)+X_p(g),\quad \forall f,g\in C^{\infty}(p)$.

(2)$X_p(cf)=cX_p(f),\quad \forall f\in C^{\infty}(p),c\in\mathbf{R}$.

(3)$X_p(f\cdot g)=g(p)X_p(f)+f(p)X_p(g),\quad \forall f,g\in C^{\infty}(p)$.

则称 X_p 为M 在点p 的一个切向量.

命题 6.2.1　X_p 为M 在点p 的一个切向量,当且仅当 $X_p:C^{\infty}(p)/\sim\to\mathbf{R}$ 满足

(1)$X_p([f]+[g])=X_p([f])+X_p([g])$,

(2)$X_p(c[f])=cX_p([f])$,

(3)$X_p([f][g])=[g]_pX_p([f])+[f]_pX_p([g])$,

其中$[f],[g]\in C^{\infty}(p)/\sim,c\in R$.条件(3)称为 Lebnitz 法则.　□

定义 6.2.3　记 $T_p(M)=\{X_p|X_p$ 是M 在点p 的切向量$\}$,对于 $X_p,Y_p\in T_p(M),c\in\mathbf{R}$,在 $T_p(M)$上定义加法和数乘为

$$(X_p+Y_p)(f)=X_p(f)+Y_p(f),\quad \forall f\in C^{\infty}(p),$$
$$(cX_p)(f)=cX_p(f),\quad \forall f\in C^{\infty}(p),$$

使 $T_p(M)$成为实线性空间,称为 M 在点p 的切空间.

定理 6.2.1　若 $f\in C^{\infty}(p)$是常值函数,则

$$X_p(f)=0,\quad \forall X_p\in T_p(M)$$

证明　取函数 $f_1\in C^{\infty}(P)$满足条件 $f_1:U_p\to1\in\mathbf{R}$,其中 U_p 是p 的一个邻域.由 Lebnitz 法则,有

$$X_p(f_1)=X_p(f_1\cdot f_1)=f_1(p)X_p(f_1)+f_1(p)X_p(f_1)=2X_p(f_1),$$

故 $X_p(f_1)=0$.当 $f\in C^{\infty}(p)$且恒取常数时,可表 $f=cf_1$.于是,对于任意的 $X_p\in T_p(M)$,有

$$X_p(f)=X_p(cf_1)=cX_p(f_1)=0$$

成立. □

定理 6.2.2 设 $a\in\mathbf{R}^m$, 则 $\dim T_a(\mathbf{R}^m)=m$.

证明 定义 m 个函数 $\dfrac{\partial}{\partial x^j}:C^\infty(a)\to\mathbf{R}$ 为

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(f)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(a),\quad j=1,2,\cdots,m,\ \forall f\in C^\infty(a).$$

可核验, $\dfrac{\partial}{\partial x^j}\in T_a(\mathbf{R}^m)$, 故只需证 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x^m}\right\}$ 是 $T_a(\mathbf{R}^m)$ 的一组基.

设 $x^i:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$, $i=1,2,\cdots,m$, 是 $\mathbf{R}^m$ 上的第 i 个坐标函数, 即 $x^i(t_1,\cdots,t_i,\cdots,t_m)=t_i$, $t=(t_1,\cdots,t_m)\in\mathbf{R}^m$. 显然 $x^i\in C^\infty(a)$ 且

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(x^i)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

由此可证 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x^m}\right\}$ 是 $T_a(\mathbf{R}^m)$ 中的一个线性无关组. 下证, $T_a(\mathbf{R}^m)$ 中任一元均可由其线性表出.

任取切向量 $X_a\in T_a(\mathbf{R}^m)$, 记 $c_j=X_a(x^j)$, $j=1,\cdots,m$. 由于, 对任意的 $f\in C^\infty(a)$, f 在 $a=(a_1,\cdots,a_m)$ 附近可表为

$$f(x)=f(a)+\sum_{i=1}^m g_i(x)(x^i-a_i),$$

其中 $g_i(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{\partial f(a+t(x-a))}{\partial x_i}\mathrm{d}t$. 于是, 由 X_a 的定义, 有

$$\begin{aligned}X_a(f)&=X_a(f(a))+\sum_{i=1}^m X_a(g_i\cdot(x^i-a_i))\\&=0+\sum_{i=1}^m(a_i-a_i)X_a(g_i)+g_i(a)X_a(x^i)\\&=\sum_{i=1}^m c_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\\&=\left(\sum_{i=1}^m c_i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(f),\quad\forall f\in C^\infty(a),\end{aligned}$$

故 $X_p=\displaystyle\sum_{i=1}^m c_i\frac{\partial}{\partial x^i}$. □

定理 6.2.3 $\dim T_p(M)=m$.

证明 设 $(U,\varphi)\in\mathscr{D}$, $p\in U$ 且 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^j}\,|\,j=1,\cdots,m\right\}$ 是 $T_{\varphi(p)}(\varphi(U))$ 的基. 定义 $\dfrac{\partial}{\partial u^j}:C^\infty(p)\to\mathbf{R}$ 为

$$\frac{\partial}{\partial u^j}(f)=\frac{\partial}{\partial x^j}(f\circ\varphi^{-1}),\quad\forall f\in C^\infty(p),j=1,2,\cdots,m.$$

易知$\frac{\partial}{\partial u^j}\in T_p(M)$,且$\left\{\frac{\partial}{\partial u^j}\Big| j=1,\cdots,m\right\}$是$T_p(M)$的一组基,结论成立. □

由该定理立即可得如下命题.

命题 6.2.2 $T_p(M)$与$\mathbf{R}^m$同构.

注 6.2.1 注 1° $T_a(\mathbf{R}^m)$中的基$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}\right\}$称为$T_a(\mathbf{R}^m)$中的自然基. $T_a(\mathbf{R}^m)$与$\mathbf{R}^m$在二者的自然基下的同构称为自然同构.但$T_p(M)$中没有自然基,因而不存在$T_p(M)$到$\mathbf{R}^m$的自然同构. $T_p(M)$中的基与图$(U,\varphi)\in\mathscr{D}$的选择有关,称为在$(U,\varphi)$下的基.

注 2° M在p点的切向量和切空间是局部概念,对于M中的开集U与点$p\in U$有$T_p(U)=T_p(M)$.

定义 6.2.4 $T_p(M)$上全体线性泛函构成的线性空间,称为M在p点的余切空间,记作$T_p^*(M)$.称$T_p^*(M)$中的元素为M在点p的余切向量.

命题 6.2.3 $\dim T_p^*(M)=\dim T_p(M)$.

定义 6.2.5 设$p\in M$,光滑映射$F:M\to N$.

(1)称映射$F_{*p}:T_p(M)\to T_{F(p)}(N)$为$F$在点$p$的导算子,若对任一$X_p\in T_p(M)$,使$F_{*p}(X_p)\in T_{F(p)}(N)$由下式

$$(F_{*p}(X_p))(f)=X_p(f\circ F),\quad \forall f\in C^\infty(F(p)),$$

所确定,也记F_{*p}为$\mathrm{d}F_p$.

(2)称F_{*p}的对偶算子$F_p^*:T_{F(p)}^*(N)\to T_p^*(M)$为$F$在点$p$的余导算子,若对任一$\omega\in T_{F(p)}^*(M)$,使$F_p^*(\omega)\in T_p^*(M)$由下式

$$(F_p^*\omega)(X_p)=\omega(F_{*p}X_p),\quad \forall X_p\in T_p(M)$$

所确定.

易见,F_{*p}与F_p^*是线性算子.在不引起混淆时,下标p可省略.

定理 6.2.4 设,$F:M\to N$与$G:N\to P$是光滑映射,$p\in M$,则

$$(G\circ F)_*=G_*\circ F_*,\qquad (G\circ F)^*=F^*\circ G^*,$$

成立.于是,当$F:M\to N$是微分同胚时,F_{*p}与F_p^*都是线性同构,且

$$(F_{*p})^{-1}=(F^{-1})_{*F(p)},\quad (F_p^*)^{-1}=(F^{-1})_{F(p)}^*.$$

证明 由定义立即可得. □

定理 6.2.5 设$(U,\varphi)\in\mathscr{D}$,$p\in U\subset M$,而$x^i$与$u^i$分别是$\mathbf{R}^m$与$(U,\varphi)$中第$i$个坐标函数,$i=1,\cdots,m$,且$\left\{\frac{\partial}{\partial u^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial u^m}\right\}$为$T_p(M)$在$(U,\varphi)$下的基,则

(1)$\{\mathrm{d}u^i\in T_p^*(M)\mid j=1,2,\cdots,m\}$是$T_p^*(M)$中的一组基,且对$i,j=1,2,\cdots,m$有

$$du^j\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)=\delta_{ij},\quad \frac{\partial}{\partial u^i}=\varphi_*^{-1}\frac{\partial}{\partial x^i},\quad du^i=\varphi^* dx^i.$$

(2)设 $X_p\in T_p(M)$, $\omega_p\in T_p^*(M)$, 对 $i=1,2,\cdots,m$, 有

$$X_p=\sum_{i=1}^m X_p(u^i)\frac{\partial}{\partial u^i},\tag{6.2.1}$$

$$\omega_p=\sum_{i=1}^m \omega_p\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)du^i.\tag{6.2.2}$$

证明 证结论(1) step1 设 $\{x^1,\cdots,x^m\}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的坐标函数, 于是 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}\right\}$ 是 $T_{\varphi(p)}(\varphi(U))$ 中的自然基, 且可证 $\{dx^1,\cdots,dx^m\}$ 是 $T^*_{\varphi(p)}$ 中的基, 并有

$$dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)=\delta_{ij}.$$

step2 由定理6.2.4知 $\varphi_{*,p}^{-1}$ 与 φ_p^* 线性同构, 于是 $\left\{\varphi_{*,p}^{-1}\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\varphi_{*,p}^{-1}\frac{\partial}{\partial x^m}\right\}$ 与 $\{\varphi_p^* dx^1,\cdots,\varphi_p^* dx^m\}$ 分别是 $T_p(M)$ 与 $T_p^*(M)$ 中的基, 并且

$$(\varphi_p^* dx^j)\left(\varphi_{*,p}^{-1}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\delta_{ij}.\tag{6.2.3}$$

step3 由 $\frac{\partial}{\partial u^i}$ 的定义, 有

$$\frac{\partial}{\partial u^i}=\varphi_{*p}^{-1}\frac{\partial}{\partial x^i}.\tag{6.2.4}$$

setp4 对任意的 $X_p\in T_p(M)$, 有

$$\begin{aligned}(\varphi_p^* dx^i)(X_p)&=dx^i(\varphi_{*,p}X_p)\\&=(\varphi_{*,p}X_p)(x^i)=X_p(x^i\circ\varphi)=X_p(u^i)=du^i(X_p),\end{aligned}$$

故

$$du^i=\varphi_p^* dx^i,\tag{6.2.5}$$

将(6.2.4),(6.2.5)代入(6.2.3)式, 有

$$du^j\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)=\delta_{ij},$$

从而结论(1)得证.

证结论(2) 只证(6.2.1)式, 类似可证(6.2.2)式. 事实上, 设

$$X_p=\sum_{j=1}^m c_j\frac{\partial}{\partial u^j},$$

由

$$X_p(u^i) = \mathrm{d}u^i(X_p) = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathrm{d}u^i \frac{\partial}{\partial u^j} = c_i,$$

代入上式有(6.2.1)式成立,故结论(2)成立.证毕. □

定理 6.2.6　设 $F:M\to N$ 是光滑映射, $p\in M, q=F(p)$, 设(U,φ)与(V,ψ)分别是点 p 与点q 处的局部坐标系, $\left\{\frac{\partial}{\partial u^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial u^m}\right\}$与$\left\{\frac{\partial}{\partial v^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial v^n}\right\}$分别是$T_p(M)$在$(U,\varphi)$下与$T_q(N)$在$(V,\psi)$下的基,则导算子$F_{*,p}$: $T_p(M)\to T_q(N)$在上述基下对应的变换矩阵正是$\psi=F\circ\varphi^{-1}$在点$\varphi(p)$的 Jacobi 矩阵.即,若令

$$F_{*,p}\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \sum_{i=1}^{m} c_{ij}\frac{\partial}{\partial v^i}, \quad j = 1,2,\cdots,m, \tag{6.2.6}$$

则

$$c_{ij} = \frac{\partial(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})^i}{\partial x^j}(\varphi(p)).$$

证明　令$\{x^1,\cdots,x^m\}$和$\{y^1,\cdots,y^n\}$分别为$\mathbf{R}^m$ 与 $\mathbf{R}^n$ 中的坐标函数,那么由定理 6.2.5,有

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \varphi_*^{-1}\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial}{\partial v^i} = \psi_*^{-1}\frac{\partial}{\partial y^i},$$

于是由(6.2.6),得

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \left(F_{*,p}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)(v^i) = \frac{\partial}{\partial u^j}(v^i\circ F) = \left(\varphi_*^{-1}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)(y^i\circ\psi\circ F) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j}(y^i\circ\psi\circ F\circ\varphi^{-1}) = \frac{\partial(\psi\circ F\circ\varphi^{-1})^i}{\partial x^j}(\varphi(p)) \end{aligned}$$

成立. □

§6.3　向量场与流

设$(M,\mathscr{D})$是 m 维微分流形, Ω 为M 的开子集.

定义 6.3.1　(1)分别称

$$T(M) = \bigcup_{p\in M} T_p(M)$$

与

$$T^*(M) = \bigcup_{p\in M} T_p^*(M)$$

为 M 上的切丛和余切丛.

(2)称映射 $X:\Omega\to T(M)$为 Ω 上的一个切向量场,若满足条件

$$X(p) = X_p \in T_p(M), \quad \forall\, p\in\Omega,$$

即指定 p 点的一个切向量与其对应,简称向量场.

(3)称映射 $\omega:\Omega\to T^*(M)$ 为 Ω 上的一个余切向量场,若满足条件

$$\omega(p)=\omega_p\in T_p^*(M),\quad \forall p\in\Omega.$$

简称余向量场.

定义 6.3.2 (1)称 Ω 上的切向量场 X 是 C^r 向量场,若对任何 $f\in C^\infty(\Omega)$,均有 $X(f)\in C^r(\Omega)$,其中 $X(f):\Omega\to\mathbf{R}$ 在点 $p\in\Omega$ 的值定义为 $X_p(f)$. Ω 上 C^r 向量场的全体所成之集,记为 $\mathscr{X}^r(\Omega)$,特别当 $r=\infty$ 时,记为 $\mathscr{X}(\Omega)$.

(2)称 Ω 上的余向量场 ω 为 C^r 余向量场,若对任何 $X\in C^r(\Omega)$,均有 $\omega(X)\in C^r(\Omega)$,其中 $\omega(X):\Omega\to\mathbf{R}$ 在点 $p\in\Omega$ 的值定义为 $\omega_p(X_p)$. Ω 上 C^r 余向量场的全体所成之集,记为 $\mathscr{W}^r(\Omega)$,特别当 $r=\infty$ 时,记为 $\mathscr{W}(\Omega)$.

命题 6.3.1 设 $x^i(i=1,2,\cdots,m)$ 是 $\mathbf{R}^m$ 上的坐标函数,则

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 与 $\mathrm{d}x^i$, $i=1,2,\cdots,m$,分别是 $\mathbf{R}^m$ 上的光滑向量场与光滑余向量场.

(2)对于 M 的任一局部坐标系 (U,φ) 有 $\dfrac{\partial}{\partial u^i}=\varphi_*^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 与 $\mathrm{d}u^i=\varphi^*\mathrm{d}x^i$, $i=1,2,\cdots,m$,分别是 U 上的光滑向量场与光滑余向量场.

命题 6.3.2 $\mathscr{X}(\Omega)$ 按如下定义的运算构成环 $C^\infty(\Omega)$ 上的线性空间. 对于 $X,Y\in\mathscr{X}(\Omega)$, $f\in C^\infty(\Omega)$ 定义

$$X+Y\in\mathscr{X}(\Omega)\text{ 为}(X+Y)_p=X_p+Y_p,\quad\forall p\in\Omega,$$

$$(fX)_p=f(p)X_p,\quad\forall p\in\Omega.$$

类似地, $\mathscr{W}(\Omega)$ 也是环 $C^\infty(\Omega)$ 上的线性空间.

定理 6.3.1 设 M 为 C^r 流形 $(r>1)$,则切丛 $T(M)$ 为 C^{r-1} 流形.

定义 6.3.3 设 $X\in\mathscr{X}(M)$,称 M 上的光滑曲线 $\sigma:(a,b)\to M$ 为 X 的一条光滑积分曲线,若满足条件

$$\sigma_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_t=X_{\sigma(t)},\quad\forall t\in(a,b).$$

当 $0\in(a,b)$ 时, $\sigma(0)=p$ 称为积分曲线的初值,其中, $(a,b)\subseteq\mathbf{R}$.

定理 6.3.2 设 $X\in\mathscr{X}(M)$,则对于任一给定的点 $p\in M$,存在向量场 X 的以 p 为初值的光滑积分曲线.

证明 任取 $p\in M$, $(U,\varphi)\in\mathscr{D}$, $p\in U$. 若 $\{x^1,\cdots,x^m\}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的坐标函数集,由定理 6.2.5 知

$$\left\{\frac{\partial}{\partial u^j}\,\middle|\,j=1,2,\cdots,m,\frac{\partial}{\partial u^j}=\varphi_{*,p}^{-1}\frac{\partial}{\partial x^j}\right\}$$

是 $T_p(M)$ 的基,于是 X 在点 p 的局部坐标系 (U,φ) 下有局部表示

$$X = \sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial}{\partial u^i},$$

其中 $a^i \in C^\infty(U)$. 令 $F: \varphi(U) \to \mathbf{R}^m$ 为

$$F(x) = (a^1(p), a^2(p), \cdots, a^m(p)), \quad \forall x = \varphi(p) \in \varphi(U).$$

显然 $F \in C^\infty$, 且初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} = F(\tau(t)), \\ \tau(0) = \varphi(p), \end{cases}$$

存在光滑解 $\tau: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{R}^m$. 令

$$\sigma = \varphi^{-1} \circ \tau: (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subset M,$$

则 σ 即是 X 的以 p 为初值的光滑积分曲线. □

定义 6.3.4　设 G 是 $M \times \mathbf{R}$ 中包含 $M \times \{0\}$ 的开集, 且对每个 $p \in M$, $M \times \mathbf{R}$ 中的子集 $G \cap (\{p\} \times \mathbf{R})$ 是连通的. 若光滑映射 $\Phi: G \to M$ 具有如下性质

1° $\Phi(p, 0) = p$, $\forall p \in M$.

2° $\Phi(p, t+s) = \Phi(\Phi(p, s), t)$.

当 t, s 和 p 使上式两边都有意义时, 则称 Φ 为 M 上的一个 C^∞ 局部流.

定义 6.3.5　设 $\sigma_p \in C^\infty$, $\sigma_p(0) = p$, 即 σ_p 是 M 中过点 p 的光滑曲线, 称切向量 $\sigma_{p*}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_t \in T_p(M)$ 为 t 点处的速度向量, 由对应

$$p \in M \mapsto X_p = \sigma_{p*}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_0.$$

确定的 M 上的向量场 X, 若 $X \in C^\infty$, 则称 X 为局部流的速度向量场.

定理 6.3.3　M 上的每个 C^∞ 局部流 Φ 可诱导出 M 上 Φ 的速度向量场; 反之, M 上的每一个 C^∞ 向量场 X 可生成 M 上的一个 C^∞ 局部流 Φ, 使得 Φ 以 X 为其速度向量场, 且在所有以 X 为其速度向量场的 M 上的 C^∞ 局部流中, Φ 是极大的.

证明　设 $\Phi: G \to M$ 是 M 上的一个 C^∞ 局部流. 对每点 $p \in M$, 记

$$a_p = \inf\{t \in \mathbf{R} \mid (p, t) \in G\}, \quad b_p = \sup\{t \in \mathbf{R} \mid (p, t) \in G\},$$

显然 $0 \in (a_p, b_p) \subset \mathbf{R}$, 定义 $\sigma_p: (a_p, b_p) \to M$ 为

$$\sigma_p(t) = \Phi(p, t), \quad \forall t \in (a_p, b_p),$$

则 $\sigma_p \in C^\infty$ 且 $\sigma_p(0) = p$, 由对应

$$p \in M \to X_p = \sigma_{p*}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_0 \in T_p(X),$$

可定义 M 上的向量场 X, 且可证 $X \in C^\infty$. 下证后一结论.

对于给定的 $X \in \mathscr{X}(M)$, $p \in M$, 设 Γ 是一指标集, 考虑光滑曲线

$$\sigma_\alpha: (a_\alpha, b_\alpha) \to M, \quad \forall \alpha \in \Gamma,$$

其中 σ_{α_1}和 σ_{α_2}限制在$(a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1})\cap(a_{\alpha_2}, b_{\alpha_2})$上是相同的.记

$$(t_p^-, t_p^+) = \bigcup_{\alpha\in\Gamma}(a_\alpha, b_\alpha),$$

则可得光滑积分曲线 $\sigma:(t_p^-, t_p^+)\to M$,使 $\sigma(0)=p$,其中

$$-\infty \leqslant t_p^- < 0 < t_p^+ \leqslant +\infty,$$

称为 X 的以 p 为初值的极大积分曲线.记

$$G = \{(p,t)\in M\times\mathbf{R} \mid p\in M, t\in(t_p^-, t_p^+)\},$$

据常微分方程初值问题解对初值的光滑依赖性,易核验 G 是 $M\times\mathbf{R}$ 中含 $M\times\{0\}$的开集.作 $\Phi:G\to M$ 为

$$\Phi(p,t) = \sigma_p(t),\ \forall(p,t)\in G.$$

则可证 Φ 即为所求. □

定义 6.3.6 定义域$G=M\times\mathbf{R}$的 C^∞局部流 Φ 称为M上的一个C^∞整体流,简称为 C^∞流.

定理 6.3.4 若 M 是紧微分流形,则 M 上的每个C^∞向量场 X 生成的极大局部流Φ 是M 上的整体流.

§6.4 Riemann 流形

设M是光滑流形,Ω是M中的开集,Ω上C^r向量场的全体之集记为$\mathscr{X}^r(\Omega)$;特别地,$\mathscr{X}(M)$表示 M 上的全体光滑向量场所成之集.

定义 6.4.1[88] 称光滑流形 M 为 Riemann 流形,若在 $T(M)$上给定了一个 Riemann 度量$\langle\cdot,\cdot\rangle: T(M)\times T(M)\to\mathbf{R}$,对任一 $p\in M$,满足:

(1)$\langle\zeta,\eta\rangle=\langle\eta,\zeta\rangle$, $\forall\,\zeta,\eta\in T_p(M)$.

(2)$\langle c_1\zeta_1+c_2\zeta_2,\eta\rangle=c_1\langle\zeta_1,\eta\rangle+c_2\langle\zeta_2,\eta\rangle$, $\forall\,c_1,c_2\in\mathbf{R}$, $\zeta_1,\zeta_2,\eta\in T_p(M)$.

(3)$\langle\zeta,\zeta\rangle\geqslant 0$ 且$\langle\zeta,\zeta\rangle=0\Rightarrow\zeta=0$, $\forall\,\zeta\in T_p(M)$.

又对 $X,Y\in\mathscr{X}(M)$,定义$\langle X,Y\rangle:M\to\mathbf{R}$ 为

$$\langle X,Y\rangle_p = \langle X_p, Y_p\rangle,\quad \forall\, p\in M.$$

定义 6.4.2 称映射

$$\nabla:\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M)$$

是光滑流形 M 上的一个联络,如果满足

(1)对所有的 $c_1,c_2\in\mathbf{R}$, $X,Y,Z\in\mathscr{X}(M)$,有

$$\nabla(c_1X+c_2Y,Z) = c_1\nabla(X,Z)+c_2\nabla(Y,Z),$$

$$\nabla(Z,c_1X+c_2Y) = c_1\nabla(Z,X)+c_2\nabla(Z,Y).$$

(2)对任一 $f\in C^\infty(M,\mathbf{R})$, $X,Y\in\mathscr{X}(M)$有

$$\nabla(fX, Y) = f\nabla(X, Y),$$
$$\nabla(X, fY) = X(f)Y + f\nabla(X, Y).$$

其中 $fX \in \mathscr{X}(M)$ 定义为

$$(fX)_p = f(p)X_p, \quad \forall p \in M;$$

更若 M 是 Riemann 流形, M 上的联络称为 Riemann 联络, 如果 ∇ 还满足,

(3) $X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla(X, Y), Z\rangle + \langle Y, \nabla(X, Z)\rangle$.

(4) $\nabla(X, Y) - \nabla(Y, X) = [X, Y]$.

其中 $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$; 向量场 X 和 Y 的 Lie 氏积 $[X, Y]$ 定义为

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X,$$

是一个向量场, 有时记 $X \circ Y = XY$.

注 6.4.1 在任何一个 Riemann 流形 M 上存在唯一的 Riemann 联络.

注 6.4.2 Riemann 联络具有局部性, 即, 如果在点 $p \in M$ 的邻域 U 上有 $X|_U = 0$ 或者 $Y|_U = 0$, 则 $\nabla(X, Y) = 0$.

定义 6.4.3 设 $\gamma: [\tau_0, \tau] \subset \mathbf{R} \to M$ 是光滑流形 M 上的一条光滑曲线, 称映射 $v: [\tau_0, \tau] \to T(M)$ 是沿曲线 γ 的光滑向量场, 若满足条件

$$v(t) \in T_{\gamma(t)}(M), \quad \forall t \in [\tau_0, \tau].$$

记沿曲线 γ 的全体光滑向量场组成的集合为 $\mathscr{X}(\gamma)$.

定义 6.4.4 称映射 $D_t: \mathscr{X}(\gamma) \to \mathscr{X}(\gamma)$ 为沿曲线 γ 的协变微商, 若对给定的联络 ∇ 及 $\forall c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, $u, v \in \mathscr{X}(\gamma)$, $\forall f \in C^\infty([\tau_0, \tau], \mathbf{R})$ 满足

(1) $D_t(c_1 u(t) + c_2 v(t)) = c_1 D_t u(t) + c_2 D_t v(t)$.

(2) $D_*(f(t)v(t)) = \dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}v(t) + f(t)D_t v(t)$.

(3) 若存在含曲线 γ 的开集 U 和 U 上的向量场 X 使 $Y_{\gamma(t)} = v(t)$, 则

$$D_t v(t) = \nabla(\dot{\gamma}(t), Y),$$

其中 $\dot{\gamma}(t) = \mathrm{d}\gamma\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \in T_{\gamma(t)}(M)$ 是曲线 γ 的切向量.

注 6.4.3 对给定的联络, 协变微商 D_t 是唯一存在的.

定义 6.4.5 设 $v \in \mathscr{X}(\gamma)$, 称向量场 $v(t)$ 沿曲线 γ 平行移动, 若

$$D_t v(t) = 0, \quad \forall t \in [\tau_0, \tau];$$

特别地, 如果 $v(t) = \dot{\gamma}(t)$ 沿曲线 γ 平行移动, 则称 γ 是自平行曲线.

若记

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\partial_i,$$

则自平行曲线满足测地线方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^k}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{i,j=1}^{m} \Gamma_{ij}^k \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, m, \qquad (6.4.1)$$

其中 Γ_{ij}^{k} 是联略系数，自平行曲线又称为测地线.

注 6.4.4 测地线方程(6.4.1)是一个二阶线性微分方程组，对于给定的初值，其解是唯一存在的. 即：对任意给定的 $p \in M$，存在含 p 的开邻域 U 和正数 δ，使得对任意的 $q \in U$ 和满足 $|\zeta| < \delta$ 的 $\zeta \in T_q(M)$，存在唯一的测地线 $\gamma = \gamma(t, g, \zeta)$，$t \in (-s, s)$，满足初值条件

$$\gamma(0, q, \zeta) = q, \quad \dot{\gamma}(0, q, \zeta) = \zeta,$$

且 $\gamma(t, q, \zeta)$ 关于变元 t, q, ζ 是光滑的.

注 6.4.5 设测地线 $\gamma(t, q, \zeta)$ 如注 6.4.4 所述，对于 $q \in M$，$\zeta \in T_q(M)$，$\lambda \in \mathbf{R}$ 且 $|\lambda\zeta| < \delta$ 有

$$\gamma(\lambda t, q, \zeta) = \gamma(t, q, \lambda\zeta), \quad \forall\, t \in (-s, s). \tag{6.4.2}$$

事实上，由测地线方程(6.4.1)的"齐次"性质，如果 $x(t)$ 是该方程关于初值

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \lambda \dot{x}_0$$

的解，那么 $y(t) = x(\lambda t)$ 是方程(6.4.1)满足初值条件

$$y(0) = x_0, \quad \dot{y}(0) = \lambda \dot{x}_0$$

的解. 因而(6.4.2)成立. 于是，过 q 点沿 ζ 方向的测地线可以表示为

$$\gamma(t, q, \zeta) = \exp_q(t\zeta). \tag{6.4.3}$$

事实上，由(6.4.2)有

$$\gamma(t, q, \zeta) = \gamma(1, q, t\zeta) = \exp_q(t\zeta)$$

成立.

利用测地线 $\gamma(t, q, \zeta)$ 可以定义所谓的指数映射，后者将应用于伪轨族跟踪和双曲不变集结构稳定性的研究(见第九章).

下面，沿用注 6.4.4 中的记号.

定义 6.4.6 对于 $q \in U$，称映射 $\exp_q : \{\zeta \in T_q(M) \mid |\zeta| < \delta\} \to M$，$\exp_q\zeta = \gamma(1, q, \zeta)$ 为指数映射，其中范数 $|\cdot|$ 为度量 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 诱导出的范数.

定理 6.4.1 在定义 6.4.6 中，指数映射对 q 和 ζ 都是光滑的，且

$$(D\exp_q)_0 = id : T_q(M) \to T_q(M),$$

$$(D\exp_q^{-1})_q = id : T_q(M) \to T_q(M),$$

因而对充分小的正数 $\eta < \delta$，映射

$$\exp_q : \{\zeta \in T_q(M) \mid |\zeta| < \eta\} \to M$$

是到 M 中含点 q 的某一开集的微分同胚.

证明 光滑性由定义可知. 由 $\exp_q(t\zeta) = \gamma(t, q, \zeta)$，两端对 t 微分并在 $t = 0$ 处取值得

$$(D\exp_q)_0\zeta = \dot{\gamma}(0, q, \zeta) = \zeta.$$

因而

$$(\mathrm{D}\exp_q)_0 = id : T_q(M) \to T_q(M).$$

另一方面,由 $\exp_q^{-1} \circ \exp_q \zeta = \zeta$,有

$$(\mathrm{D}\exp_q^{-1})_q \circ (\mathrm{D}\exp_q)_0 \zeta = \zeta,$$

故

$$(\mathrm{D}\exp_q^{-1})_q = id : T_q(M) \to T_q(M).$$

□

定义 6.4.7 设 $\theta : [\tau_0, \tau] \to M$ 是分段光滑的连续曲线,定义其弧长

$$l(\theta) = \int_{\tau_0}^{\tau} \left| \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t,$$

其中,$|\cdot|$表示由 Riemann 度量$\langle \cdot, \cdot \rangle$导出的范数.

注 6.4.6 测地线在局部范围内是最短线,即:当点 p 与点 q 充分接近时,联结这两点的最短曲线是测地线.

定义 6.4.8 设光滑 Riemann 流形 M 是连通的,而 $p, q \in M$,称

$$d(p,q) = \inf\{ l(\theta) \mid \theta \text{ 联结 } p \text{ 与 } q \}$$

为 p 与 q 两点间的距离,其中 θ 为连结 p 与 q 的分段光滑曲线.

易知,这样定义的 $d : M \times M \to \mathbf{R}$ 满足距离三公理.

定理 6.4.2 设 M 是连通的光滑 Riemann 流形,对任意 $p \in M$,存在含点 p 的开邻域 $U \subset M$ 和正数 δ,使得当 $q \in U, \zeta \in T_q(M), |\zeta| < \delta$ 时,

$$d(\exp_q \zeta, q) = |\zeta|.$$

从而 $d(p,q) = |\exp_q^{-1} p| = |\exp_p^{-1} q|$.

证明 由(6.4.3)知

$$\gamma(t, q, \zeta) = \exp_q t\zeta$$

是联结 $\gamma(0, q, \zeta) = q$ 与 $\gamma(1, q, \zeta) = \exp_q \zeta$ 的测地线.由于测地线是局部最短线,故当$|\zeta|$充分小时,$\exp_q \zeta$ 充分接近 q,故

$$d(\exp_q \zeta, q) = l(\gamma).$$

又由于沿测地线切向量的长度保持不变,即

$$|\dot{\gamma}(t, q, \zeta)| = |\dot{\gamma}(0, q, \zeta)| = |\zeta|.$$

从而

$$d(\exp_q \zeta, q) = l(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}| dt = \int_0^1 |\zeta| dt = |\zeta|,$$

即结论成立.

□

定理 6.4.3 设 $U \subset M$ 为开集,其闭包 $\bar{U} \subset M$ 是紧致集,则存在 $\delta > 0$,对任意 $q \in U$,映射

$$\exp_q : \{ \zeta \in T_q(M) \mid |\zeta| < \delta \} \to B(q, \delta)$$

是光滑微分同胚,其中 $B(q, \delta) = \{ p \in M, d(p,q) < \delta \}$.

证明 由定理6.4.1和6.4.2可证. □

§6.5 向 量 丛

本节将切丛的概念推广到一般的向量丛.有的文献[89]将向量丛定义为映射的三元组(π, a, s),这里采用文献[90]的记号和叙述方式.

定义 6.5.1 设E, X是Hausdorff拓扑空间,$\pi: E \to X$是连续满射,称$(E, \pi, X, \mathbf{R}^k)$是一个$k$维实向量丛,若

(1)对任意$x \in X, E_x = \pi^{-1}(x)$具有$k$维实向量空间结构.

(2)对任意$x_0 \in X$,存在x_0在X中的开邻域U和同胚$h: \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^k$满足条件.

H1 $p_1 \circ h = \pi$,其中$p_1: U \times \mathbf{R}^k \to U$是投影.

H2 对任意$x \in U, h|\pi^{-1}(x): \pi^{-1}(x) \to \{x\} \times \mathbf{R}^k$是线性空间的同构.

这里,称E为全空间,X为底空间,π为向量丛的投影,E_x为向量丛在点x上的纤维.有时,简称E或$\pi: E \to X$是一个k维实向量丛.

注 6.5.1 称上述定义中的开邻域U为x_0点的一个局部平凡化邻域,同胚$h: \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^k$为局部平凡化同胚.

注 6.5.2 如果E和X是C^r微分流形,$\pi: E \to X$是C^r浸没(submersion),且局部平凡化$h: \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^k$是$C^r$微分同胚,则称向量丛$(E, \pi, X, \mathbf{R}^k)$是$C^r$向量丛;$C^\infty$向量丛又称为光滑向量丛.

注 6.5.3 向量丛的定义还有另外两种形式(见文献[90]).

定义 6.5.2 设Γ是一指标集,$\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$,$X$是$C^r$流形(或拓扑空间),$\{U_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$是$X$的一个开覆盖,如果对$\Gamma$中任何使得$U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$的$\alpha$和$\beta$,确定的$C^r$映射(连续映射)

$$g_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \to GL(\mathbf{R}^k)$$

满足

$$g_{\gamma\beta}(x) \cdot g_{\beta\alpha}(x) = g_{\gamma\alpha}(x), \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma,$$

其中$GL(\mathbf{R}^k)$是k阶满秩实矩阵,则称$\{g_{\beta\alpha} | \alpha, \beta \in \Gamma, U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing\}$是与开覆盖$\{U_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$相关联的一个转换函数系.

注 6.5.4 由向量丛的定义可见,底空间的任何一个局部平凡化覆盖决定了一个与之相关联的转换函数系,其中的转换函数就是纤维上的坐标变换.反之,对于拓扑空间(C^r流形)的任意一个开覆盖$\{U_\alpha\}$和与之相关联的一个转换函数系$\{g_{\beta\alpha}\}$,也可以构造一个向量丛(C^r向量丛)$(E, \pi, X, \mathbf{R}^k)$使其在$U_\alpha(\alpha \in \Gamma)$上可以局部平凡化,并且按这局部平凡化所决定的$\pi^{-1}(x)$上的纤

维坐标变换恰好为 $g_{\beta\alpha}(x)$.

注 6.5.5 由转换函数系可给出 Whitney 和的构造. 设 $(E^1, \pi^1, X, \mathbf{R}^m)$ 和 $(E^2, \pi^2, X, \mathbf{R}^n)$ 是底空间 X 上的两个向量丛, $\{U_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ 是关于这两个向量丛的局部平凡化覆盖, 相应的转换函数系分别为 $\{g_{\beta\alpha}^{(1)}\}$ 和 $\{g_{\beta\alpha}^{(2)}\}$, 其中

$$g_{\beta\alpha}^{(1)} \in GL(\mathbf{R}^m), \quad g_{\beta\alpha}^{(2)} \in GL(\mathbf{R}^n), \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

记 $k = m + n$ 置

$$g_{\beta\alpha}(x) = \begin{bmatrix} g_{\beta\alpha}^{(1)}(x) & 0 \\ 0 & g_{\beta\alpha}^{(2)}(x) \end{bmatrix} \in GL(\mathbf{R}^k),$$

即定义

$$g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(\mathbf{R}^k).$$

$\{g_{\beta\alpha}\}$ 是相应于 $\{U_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ 的转换函数系, 其生成的 k 维向量丛记为 E, 称为 $E^{(1)}$ 和 $E^{(2)}$ 的 Whitney 和, 或直和, 记为

$$E = E^{(1)} \oplus E^{(2)}.$$

显然, 运算 $\oplus$ 在向量丛等价(等价概念见后)意义下具交换性和结合性.

定义 6.5.3 设 $(E, \pi, X, \mathbf{R}^k)$ 是一个向量丛, 称映射 $\sigma: X \to E$ 为该向量丛的一个截面, 若满足条件 $\pi \circ \sigma = id$, 或者说

$$\sigma(x) \in \pi^{-1}(x) = E_x, \quad \forall x \in X.$$

注 6.5.6 用 $\Gamma^0(E)$ 或 $\Gamma^0(E, X)$ 表示 E 的所有连续截面的集合. 在 $\Gamma^0(E)$ 上引入线性结构

$$(\sigma + \tau)(x) = \sigma(x) + \tau(x), \quad \forall \sigma, \tau \in \Gamma^0(E), x \in X,$$

$$(c\sigma)(x) = c\sigma(x), \quad \forall c \in \mathbf{R}, \sigma \in \Gamma^0(E), x \in X.$$

如果 X 是紧空间, 在 $\Gamma^0(E)$ 上引入范数

$$\| \sigma \| = \sup_{x \in E} \| \sigma(x) \|.$$

易证 $(\Gamma^0(E), \| \cdot \|)$ 是一个 Banach 空间, 称为 E 的连续截面空间.

例 6.5.1 设 M 是 m 维的 C^r 流形, 记 $TM = \coprod_{p \in M} T_p M$, 且定义

$$\pi: TM \to M, \quad \pi(\zeta) = p, \quad \forall \zeta \in T_p M,$$

则 $(TM, \pi, M, \mathbf{R}^m)$ 是一个 C^r 向量丛, 称为 M 的切丛. 其中符号"$\coprod$"表示不交并. 设 Ω 为 M 的开子集, 映射 $X: \Omega \to TM$ 满足条件

$$X(p) = X_p \in T_p(M), \quad \forall p \in \Omega,$$

其中 X_p 是点 p 的切向量, 则称 X 为 Ω 上的一个切向量场, 简称为向量场. 切丛 TM 的向量场 X 是 TM 的截面.

注 6.5.7 在向量丛的定义中, 如果用更一般的拓扑空间(或 C^r 微分流形) F 代替 $\mathbf{R}^k$ 作为纤维型, 用作用于 F 上的变换群 G 代替 $GL(\mathbf{R}^k)$($\mathbf{R}^k$ 空间

上的线性自同构),并要求由局部平凡化给出的纤维变换都是 G 中的元素,则得到更一般的纤维丛的概念.利用覆盖同伦定理,可以得到纤维丛上的截面延拓定理.设 E,M 是微分流形,$\pi:E\to M$ 是一个纤维丛,$\Lambda\subset M$ 是一个闭子集,如果 $\sigma:\Lambda\to E$ 是一个连续截面,则存在 Λ 的一个邻域 $U(\Lambda)\subset M$ 和连续截面 $\bar{\sigma}:U(\Lambda)\to E$ 使 $\bar{\sigma}|\Lambda=\sigma$.

定义 6.5.4 设$(E,\pi,X,\mathbf{R}^k)$是一个向量丛,称 $E^{(1)}\subset E$ 是 E 的子向量丛,简称子丛,如果对任意 $x\in X$,存在 x 的开邻域 U 和 E 的局部平凡化同胚 $h:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbf{R}^k$ 使得

$$h(\pi^{-1}(U)\cap E^{(1)})=U\times\mathbf{R}^{k_1}\times\{0\},$$

其中自然数 $k_1\leqslant k$.

定义 6.5.5 设$(E,\pi,X,\mathbf{R}^k)$是一个向量丛,S 是 X 的一个子集.易知

$$(\pi^{-1}(S),\pi|\pi^{-1}(S),S,\mathbf{R}^k)$$

也是一个向量丛,称为向量丛$(E,\pi,X,\mathbf{R}^k)$在 S 上的限制,记为$(E,\pi,X,\mathbf{R}^k)|S$ 或 $E|S$.

定义 6.5.6 设$(E,\pi,X,\mathbf{R}^k)$是一 k 维实向量丛,称连续(C^r)映射

$$\beta:E\oplus E\to\mathbf{R}$$

为向量丛 E 上的一个 Riemann 度量(C^r-Riemann 度量),若 β 限制在每一纤维 $E_x\oplus E_x$ 上是 Riemann 度量,简记 $\beta(\cdot,\cdot)$为$\langle\cdot,\cdot\rangle$. Riemann 度量自然诱导出一个范数

$$|\zeta|=\sqrt{\langle\zeta,\zeta\rangle},\quad \zeta\in E_x,x\in X.$$

用单位分解定理可证明仿紧流形上实向量丛 Riemann 度量的存在性.

定理 6.5.1 设 C^r 向量丛$(E,\pi,X,\mathbf{R}^k)$赋以 C^r-Riemann 度量,F 是 E 的子向量丛,$F_x=\pi^{-1}(x)\cap F$,记

$$F^{\perp}=\coprod_{x\in X}F_x^{\perp},$$

其中 $F_x^{\perp}$ 是 F_x 在 E_x 中关于该 Riemann 度量的正交补空间,则 $F^{\perp}$ 是 E 的子向量丛,且

$$E=F\oplus F^{\perp}.$$

证明 设 $\dim F=m<k$.对向量丛 E,存在 X 的开覆盖 $\{U_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$,对每一 U_α 存在一个标架场

$$e_\alpha(x)=(e_{\alpha,1}(x),\cdots,e_{\alpha,k}(x)),$$

使 $e_\alpha(x)$对每个 $x\in U_\alpha$ 都是 E_x 中的基底,不妨设前 m 个向量生成 F_x,即

$$F_x=\operatorname{span}\{e_{\alpha,1}(x),\cdots,e_{\alpha,m}(x)\}.$$

且不妨设 $e_\alpha(x)$是规范正交的,于是

$$F_x^{\perp}=\operatorname{span}\{e_{\alpha,m+1}(x),\cdots,e_{\alpha,k}(x)\}.$$

显然 $F^{\perp}$ 是 E 的子向量丛，且

$$E = F \oplus F^{\perp}. \qquad \square$$

定义 6.5.7　向量丛 $(E, \pi, X, \mathbf{R}^k)$ 的 Finsler 构造是一个连续函数

$$\gamma: E \to \mathbf{R},$$

它限制在每一纤维 $E_x(x \in X)$ 上是线性空间 E_x 上的范数.

下面讨论向量丛的同态与同构.

定义 6.5.8　设 $(E, \pi, X, \mathbf{R}^m)$ 和 $(F, \rho, Y, \mathbf{R}^n)$ 是两个向量丛子集，$Q \subset E$，称映射 $g: Q \to F$ 是覆盖映射 $f: \pi(Q) \to Y$ 的一个保持纤维的映射，若 $\rho \circ g = f \circ \pi$.

定义 6.5.9　设 $(E, \pi, X, \mathbf{R}^m)$ 和 $(F, \rho, Y, \mathbf{R}^n)$ 是两个向量丛映射，$f: X \to Y$，称映射 $g: E \to F$ 是 f 的同态（或覆盖 f 的丛射），若

(1) g 是覆盖 f 的保持纤维的映射.

(2) g 限制在 $E_x(\forall x \in X)$ 上是线性映射.

例 6.5.2　设 M, N 是 C^r 流形，$f: M \to N$ 是 C^r 映射，$p \in M$ 则切丛 TM 和 TN 是 C^{r-1} 向量丛，f 在点 p 的导算子

$$\mathrm{d}f_p: T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$$

定义为对 $X_p \in T_p(M)$，令 $\mathrm{d}f_p(X_p) \in T_{f(p)}(N)$ 由

$$(\mathrm{d}f_p(X_p))(\zeta) = X_p(\zeta \circ f), \quad \forall \zeta \in C^\infty(f(P))$$

所确定，其中 X_p 是 M 在 p 点的切向量. 显然 $\mathrm{d}f_p$ 是线性算子，且是覆盖 f 的保持纤维的映射. 于是

$$\mathrm{d}f: TM \to TN$$

是 f 的同态，或丛射.

在 §9.1 中，相应记号取于该处.

定义 6.5.10　设 $(E, \pi, X, \mathbf{R}^m)$ 和 $(F, \rho, Y, \mathbf{R}^n)$ 是两个向量丛，称映射 $g: E \to F$ 是向量丛同构，若

(1) $g: E \to F$ 是覆盖 $f: X \to Y$ 的保持纤维的连续映射.

(2) g 限制在每一纤维 $E_x(\forall x \in X)$ 上是向量空间的同构，即

$$g: E_x \to F_{f(x)}, \quad \forall x \in X$$

同构.

特别地，当 $X = Y, m = n, f = id$ 时，则称 g 是从 E 到 F 的等价；如果等价映射 g 是存在的，则称向量丛 E 与 F 等价.

定理 6.5.2　设 $(F, \rho, Y, \mathbf{R}^k)$ 是一向量丛，且给定映射 $f: X \to Y$，则存在一个丛 $\pi: E \to X$ 及同构丛射 $g: E \to F$ 使

$$\rho \circ g = f \circ \pi$$

且在等价意义下,向量丛 E 是唯一的,称为诱导丛.

证明 设 $E=\{(x,e)\in X\times F\mid f(x)=\rho(e)\}$,且定义映射 $\pi:E\to X$ 和 $g:E\to F$ 分别为

$$\pi(x,e)=x,\quad g(x,e)=e,\quad \forall(x,e)\in E.$$

易证 $\pi:E\to X$ 是一向量丛,且 $g:E\to F$ 是同构丛射,并满足要求. □

定义 6.5.11 设$(E,\pi,X,\mathbf{R}^m)$和$(F,\rho,X,\mathbf{R}^n)$是两个向量丛,则 E 和 F 的 Whitney 和 $E\oplus F$ 是一个向量丛,其定义如下,考虑积丛 $E\times F\to X\times X$,设 d 为对角线映射 $X\to X\times X$,其诱导丛便定义为 Whitney 和 $E\oplus F$.

下面介绍 Palais 引理.

设$(E,\pi,X,\mathbf{R}^k)$是具有 Finsler 构造的向量丛,Q 是E 中的开子集,映射 $F:Q\to E$ 是覆盖 $f:\pi(Q)\to X$ 的保持纤维的映射,对任一 $x\in\pi(Q)$,映射

$$F|E_x\cap Q:E_x\cap Q\to E_{f(x)}$$

是赋范空间内开子集 $E_x\cap Q$ 到赋范空间$E_{f(x)}$的映射.在局部平凡化表示下,设 F 表示为

$$F:(x,\zeta)\mapsto(\varphi(x),\Phi(x,\zeta)),$$

其中 $\zeta\in E_x\cap Q$,称映射

$$\widetilde{D}F:(x,\zeta)\mapsto D_\zeta\Phi(x,\zeta)$$

为 F 沿纤维E_x 的微分,其中 D_ζ 是赋范空间上的偏微分算子.对于给定的 x 在上式中省略不计.于是定义了一个线性映射

$$\widetilde{D}F(\zeta):E_x\to E_{f(x)},\quad \eta\mapsto\widetilde{D}F(\zeta)\eta,\quad \forall\eta\in E_x.$$

利用 f 的覆盖映射F,可以定义一个截面空间 $\Gamma^0(Q)$上的映射:

$$\widetilde{F}:\Gamma^0(Q)\to\Gamma^0(E),\sigma\mapsto F\circ\sigma\circ f^{-1},\quad \forall\sigma\in\Gamma^0(Q),$$

其中

$$\Gamma^0(Q)=\{\sigma\in\Gamma^0(E)\mid \mathrm{im}\sigma\subset Q\},$$

这里 $\mathrm{im}\sigma=\sigma(X)$ 且假设

$$\Gamma^0(Q)\neq\varnothing.$$

定理 6.5.3 (Palis 引理) 设具 Finsler 构造的向量丛$(E,\pi,X,\mathbf{R}^k)$的底空间 X 紧致,Q 是E 中开集,$\pi(Q)=X$,$F:Q\to E$ 是覆盖同胚$f:X\to X$ 的保持纤维映射,如果 F 沿纤维的微分$\widetilde{D}F$ 在Q 中连续,则截面空间映射 $\widetilde{F}$ 在每一点$\sigma\in\Gamma^0(Q)$上的导算子 $D\widetilde{F}(\sigma):\Gamma^0(E)\to\Gamma^0(E)$存在,且

$$D\widetilde{F}(\sigma)\tau=(\widetilde{D}F)_{(\sigma\circ f^{-1})}\circ\tau\circ f^{-1},\quad \forall\tau\in\Gamma^0(E)$$

或

$$(D\widetilde{F}(\sigma)\tau)(x)=\widetilde{D}F(\sigma(f^{-1}(x)))\tau(f^{-1}(x)).$$

证明 设 $x\in X$,对任意的 $\zeta_1,\zeta_2\in Q\cap E_x$,有

$$F(\zeta_2) - F(\zeta_1) - \tilde{D}F(\zeta_1)(\zeta_2 - \zeta_1) = r(\zeta_1, \zeta_2)(\zeta_2 - \zeta_1),$$

其中

$$r(\zeta_1, \zeta_2) = \int_0^1 [\tilde{D}F(\zeta_1 + t(\zeta_2 - \zeta_1)) - \tilde{D}F(\zeta_1)]\mathrm{d}t.$$

任给 $\varepsilon > 0$，当 X 紧致且 $\tilde{D}F$ 连续时，对充分接近 ζ_1 的 $\zeta_2 \in E_{\pi(\zeta_1)}$ 有

$$\| \gamma(\zeta_1, \zeta_2) \| < \varepsilon$$

一致成立. 于是对任意的 $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma^0(Q)$，由

$$\begin{aligned} & F(\sigma_2(f^{-1}(x))) - F(\sigma_1(f^{-1}(x))) \\ & - \tilde{D}F(\sigma_1(f^{-1}(x)))[\sigma_2(f^{-1}(x)) - \sigma_1(f^{-1}(x))] \\ = & \, r(\sigma_1(f^{-1}(x)), \sigma_2(f^{-1}(x)))[\sigma_2(f^{-1}(x) - \sigma_1(f^{-1}(x))], \end{aligned}$$

当 σ_2 充分接近 σ_1 时，有

$$\begin{aligned} & \| F(\sigma_2(f^{-1}(x))) - F(\sigma_1(f^{-1}(x))) \\ & \quad - \tilde{D}F(\sigma_1(f^{-1}(x)))[\sigma_2(f^{-1}(x)) - \sigma_1(f^{-1}(x))] \| \\ \leqslant & \, \varepsilon \| \sigma_2 - \sigma_1 \| . \end{aligned}$$

注意到 Banach 空间上导算子的定义，有结论成立. □

注 6.5.8 设 $\Gamma^b(E)$是满足条件

$$\sup_{x \in X} \| \sigma(x) \| < +\infty$$

的向量丛$(E, \pi, X, \mathbf{R}^k)$的截面的集合，并赋以范数

$$\| \sigma \| = \sup_{x \in X} \| \sigma(x) \|$$

而成 Banach 空间. 则 Palais 引理在下列条件下，对 $\Gamma^b(E)$也是成立的：

(1)$\overline{Q}$ 在E 中紧.

(2)F 在开集 U:$\overline{Q} \subset U \subset E$ 上定义且是覆盖同胚f: $X \to X$ 的保持纤维映射.

(3)$\tilde{D}F$ 在$\overline{Q}$ 上连续. □

Palais 引理在研究双曲不变集的判定及双曲不变集的结构稳定时，有重要的应用，见第九章.

第七章　结构稳定性

结构稳定性,是微分动力系统[91~96]研究的主要内容,包括双曲不动点、双曲不变集稳定性和 Ω 稳定性,即结构稳定性的局部理论和全局理论.

§7.1　稳定性的基本概念

设 $U\subset\mathbf{R}^m$, U 到 $\mathbf{R}^m$ 全体 C^r 映射的集合记为 $C^r(U,\mathbf{R}^m)$, $K\subset U$ 是紧集.对 $g\in C^r(U,\mathbf{R}^m)$,定义

$$\| g \|_K^r = \max_{0\leqslant j\leqslant r} \sup_{x\in K} \| D^j g(x) \|,$$

其中

$$\| D^j g(x) \| = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{\substack{j_1,\cdots,j_m\geqslant 0\\ j_1+\cdots+j_m=j}} \left| \frac{\partial^j g_i(x)}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_m^{j_m}} \right|.$$

记 C^r 微分流形 M 到 C^r 微分流形 N 的 C^r 映射的集合为 $C^r(M,N)$. 设 (U,φ) 和 (V,ψ) 分别是 M 和 N 的局部坐标卡,紧集 $K\subset U$. $f\in C^r(M,N)$ 映紧集 $\widetilde{U}$ 于 V.对任给的 $\varepsilon>0$,以所有形如

$$\mathscr{U}(f;(U,\varphi),(V,\psi),K,\varepsilon) = \{g\in C^r(M,N) \mid g(\widetilde{U})\subset V$$
$$\text{且 } \| \psi\circ f\circ\varphi^{-1} - \psi\circ g\circ\varphi^{-1} \|_K^r < \varepsilon\}$$

的集合为基生成 $C^r(M,N)$ 的拓扑,称之为弱拓扑,并称 $\mathscr{U}$ 为 f 的一个 ε 邻域,或简称为邻域.

记 M 到自身的全体 C^r 微分同胚的集合为 $\mathrm{Diff}^r(M)$,并赋以 $C^r(M,M)$ 的诱导拓扑. $\mathrm{Diff}^r(M)$ 是 $C^r(M,M)$ 中的开集.

定义 7.1.1　称 $f\in\mathrm{Diff}^r(M)$ 是 C^r 结构稳定的,若存在 f 在 $C^r(M)$ 中的邻域 $\mathscr{U}$,使得任意的 $g\in\mathscr{U}$ 都与 f 是拓扑共轭的,即存在同胚 $h:M\to M$ 使

$$h\circ f = g\circ h.$$

特别当 $r=1$ 时,就称 f 是结构稳定的.

由于拓扑共轭保有动力系统的拓扑性质,所以当 f 结构稳定时,在微小扰动下其拓扑共轭所保有的性质是不会改变的.

例 7.1.1　在例 2.1.3 中,商空间 $T^1=\mathbf{R}/\sim$,称为圆周.对常数 θ,微分同胚

$$A: T^1\to T^1,\quad A([x]) = [x+\theta]$$

称为 T^1 上的旋转，θ 叫旋转角. 显然，两个旋转 A_1 和 A_2 的旋转角 θ_1 和 θ_2 满足条件 $\theta_1=\theta_2(\mathrm{mod}1)$时，$A_1=A_2$.

微分同胚 A 是结构不稳定的. 事实上，当 θ 有一小扰动为有理数 $p/q(p,q$ 互素)时，其动力系统的每一轨迹只有 q 个点，且每一个点都是 q 周期点. 而当 θ 有一小扰动为无理数时，其动力系统的每一轨道在 T^1 中稠. □

如果将拓扑共轭限制在 Ω 集上，就得到所谓的 Ω 共轭.

定义 7.1.2 称 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 是 C^r-Ω 稳定的，若存在 f 在 $C^r(M)$ 中的邻域 $\mathscr{U}$，使得任意的 $g\in\mathscr{U}$ 都与 f 是 Ω 拓扑共轭的，即存在同胚 $h:\Omega(f)\to\Omega(g)$ 使

$$h\circ f|_{\Omega(f)}=g|_{\Omega(g)}\circ h.$$

特别当 $r=1$ 时，就称 f 是 Ω 稳定的.

在不变集上的结构稳定性，有如下定义.

设 $U\subset M$ 是 C^r 微分流形 M 内的开集；$f\in C^r(U,M)$ 是从 U 到像集 $f(U)$ 的微分同胚；d 是与 M 的拓扑相容的任意一个距离.

定义 7.1.3 设 $\Delta\subset U$ 是 f 的一个紧致不变集，称 f 在 Δ 上是 C^r 结构稳定的，如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 f 在 $C^r(U,M)$ 中的邻域 $\mathscr{U}$，使得对任意的 $g\in\mathscr{U}$，存在关于 g 的不变集 $\Delta_g\subset U$ 和同胚 $h:\Delta\to\Delta_g$，满足条件

(1) $d(h(x),x)<\varepsilon$, $\forall x\in\Delta$.

(2) $h\circ f|_\Delta=g\circ h|_\Delta$.

由定义可知，若 f 在 Δ 上结构稳定，则 f 经 C^r 小扰后在不变集 Δ 上不改变其动力性状，仅 Δ 中各点 x 的位置有少许移动.

在该定义中，不依赖于度量 d 的具体选择.

在某点的结构稳定性，有如下定义.

定义 7.1.4 设 $p\in U$，称 f 在点 p 是局部结构稳定的，如果对于 p 点的任意邻域 $V\subset U$，存在 f 在 $C^r(U,M)$ 中的邻域 $\mathscr{U}$，对任意的 $g\in\mathscr{U}$ 存在点 $q\in V$ 与 f 在点 p 是局部拓扑共轭的，即存在同胚

$$h:V\cup f(V)\to V\cup g(V)$$

满足

(1) $h(p)=q\in V$.

(2) $h(V)=V$.

(3) $h\circ f|V=g\circ h|V$.

上面谈到的结构稳定性是微分同胚，或离散动力系统的结构稳定性. 关于连续动力系统，或方程的流即微分方程的结构稳定性，有如下定义.

定义 7.1.5 设

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$$

是光滑紧流形 M 上的微分方程，称向量场 $f \in C^r(M)$ 导出的流 φ 是结构稳定的，如果存在 f 在 $C^r(M)$ 中的邻域 $\mathscr{U}$，使得任意的向量场 $g \in \mathscr{U}$ 导出的流 ψ 与 φ 拓扑等价；此时，也称该微分方程在 C^r 拓扑下是结构稳定的.

§7.2 圆周微分同胚的结构稳定性

1969 年，Shub[97] 曾证明：紧致微分流形 M 上的任意扩张自映射作为微分半动力系统时是结构稳定的. 这里，仅对 $M = S^1$ 的情况介绍 Shub 定理.

当 $f: S^1 \to S^1$ 是连续映射时，存在 f 的提升 $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 使 F 满足

$$F(x+1) - F(x) = k(\text{const}) \in \mathbf{Z},$$

并可定义 f 的映射度

$$\deg(f) = k.$$

特别当 f 保向自同胚时，其提升函数 $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是严格递增的连续函数，且

$$F(x+1) - F(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

对圆周自映射这一特殊情况，可借助于提升给出 C^r 映射的描述. 当 $f \in C^0(S^1, S^1)$ 而 f 的某一提升 $F \in C^r(S^1, S^1)$，则 f 的任意提升

$$F + m \in C^r(S^1, S^1), \quad \forall m \in \mathbf{Z}.$$

定义 7.2.1 设 $f \in C^0(S^1, S^1)$，$r \in \mathbf{N}$，若 f 的某一提升 $F \in C^r(\mathbf{R}, \mathbf{R})$，这时称 f 是 C^r 类函数，记为 $f \in C^r(S^1, S^1)$.

对 $C^r(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 上的 C^r 有界函数类赋以范数

$$\| F; C^r \| = \max_{0 \leq j \leq r} \sup_{x \in \mathbf{R}} |D^j F(x)|,$$

其中 $F \in C^r(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 且

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |D^j F(x)| < +\infty, \quad j = 0, 1, \cdots r.$$

设 $f, g \in C^r(S^1, S^1)$，F 和 G 分别是 f 和 g 的提升，若

$$\| F - G; C^r \| < \varepsilon,$$

则称 f 与 g 是彼此 C^r-ε 接近的.

定义 7.2.2 设 F 是 $f \in C^r(S^1, S^1)$ 的提升，称 f 是 S^1 上的扩张映射，若

$$|F'(x)| > 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

例 7.2.1 设 $m \in \mathbf{Z}$，$|m| > 1$，定义 $f: S^1 \to S^1$ 为

$$f(z) = z^m, \quad \forall z \in S^1.$$

易知 $F(x) = mx$ 是 f 的提升，显然

$$|F'(x)| = |m| > 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

故 f 是扩张映射，且 $\deg(f) = m$.

命题 7.2.1　设 $f \in C^r(S^1, S^1)$是扩张映射,则

$$\inf_{x \in \mathbf{R}} |F'(x)| = \lambda > 1,$$

且

$$|\deg(f)| > 1.$$

证明　由 $F(x+1) - F(x) = \deg(f)$,有

$$F'(x+1) = F'(x), \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

从而

$$\inf_{x \in \mathbf{R}} |F'(x)| = \min_{x \in [0,1]} |F'(x)| = \lambda > 1.$$

并且直接可得

$$|\deg(f)| = |F(x+1) - F(x)| = |F'(\zeta)| > 1. \qquad \square$$

命题 7.2.2　设 $f, g \in C^r(S^1, S^1)$, g 与 f 彼此 C^r-ε 接近, $\varepsilon < \frac{1}{2}$,则

$$\deg(f) = \deg(g),$$

更若 f 是扩张映射,则当 $\varepsilon > 0$ 充分小时, g 也是扩张映射.

证明　设 F 和 G 分别是 f 和 g 的提升,且

$$\max_{0 \leqslant j \leqslant r} \sup_{x \in \mathbf{R}} |D^j F(x) - D^j G(x)| < \varepsilon < \frac{1}{2},$$

那么

$$\begin{aligned} |\deg(f) - \deg(g)| &= |F(x+1) - F(x) - G(x+1) + G(x)| \\ &\leqslant |F(x+1) - G(x+1)| + |F(x) - G(x)| \\ &< 2\varepsilon < 1, \end{aligned}$$

从而

$$\deg(f) = \deg(g).$$

取 ε 充分小,使

$$|G'(x)| \geqslant |F'(x)| - |F'(x) - G'(x)| > \lambda - \varepsilon > 1,$$

可知后一结论成立.　$\square$

下面将要介绍的 Shub 定理指出圆周上的扩张自映射 f 生成的半动力系统是结构稳定的,利用这一结论对扩张映射可给出如下命题.

命题 7.2.3　扩张映射 $g \in C^r(S^1, S^1)$的周期点在 S^1 中稠,于是

$$\Omega(g) = S^1.$$

证明　设扩张映射 f 定义如例 7.2.1,其中

$$m = \deg(g),$$

由定理 7.2.1(Shub 定理), g 与 f 拓扑共轭,于是

$$\overline{\mathrm{Per}(g)} = \overline{\mathrm{Per}(f)}.$$

故只须证

$$\overline{\mathrm{Per}(f)} = S^1.$$

事实上,要使 $z\in S^1$ 是 f^n 的不动点,即

$$f^n(z) = z^{m^n} = z,$$

当且仅当 $z\in S^1$ 是方程

$$z^{m^n-1} = 1$$

的根,从而 f^n 的不动点集为 $|m^n-1|$ 次单位根的集合,而

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty}\{z\in S^1 \mid z^{m^n-1}=1\}$$

在 S^1 中稠,故

$$\overline{\mathrm{Per}(g)} = S^1$$

成立.另一方面,

$$S^1 = \overline{\mathrm{Per}(g)} \subset \Omega(g) \subset S^1,$$

故

$$\Omega(g) = S^1$$

成立. □

定理7.2.1(Shub) 设扩张映射 $f,g\in S^r(S^1,S^1)$ 满足条件 $\deg(f)=\deg(g)$,则 f 与 g 拓扑共轭.

证明 记 $\deg(f)=\deg(g)=d$,F 和 G 分别是 f 和 g 的提升,则

$$F(x+1) = F(x)+d, \quad \forall x\in\mathbf{R},$$
$$G(x+1) = G(x)+d, \quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

并且 F 和 G 是同胚.事实上,由

$$|F'(x)| > 1, \quad \forall x\in\mathbf{R}$$

知 F 是单调映射,故 F 是单射;且当 $k\to\pm\infty$ 时

$$F(k) = F(0)+kd \to (\pm\,\mathrm{Sgn}d)\infty,$$

知

$$F(x)\to(\pm\,\mathrm{Sgn}d)\infty,$$

当 $x\to\pm\infty$ 时是满射,故 F 是同胚;G 也亦然.在

$$\mathscr{H} = \{H\in C^0(\mathbf{R},\mathbf{R}) \mid H(x+1) = H(x)+1, \forall x\in\mathbf{R}\}$$

上赋以距离

$$D(H,K) = \sup_{x\in\mathbf{R}}|H(x)-K(x)|,$$

使 $\mathscr{H}$ 成为完备的度量空间.对于 $H\in\mathscr{H}$,置

$$\mathscr{T}(H) = G^{-1}\circ H\circ F.$$

则上式定义了一个从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}$ 的映射.事实上,由

$$G(G^{-1}(y)+1) = y+d, \quad \forall y\in\mathbf{R},$$

有

$$G^{-1}(y+d) = G^{-1}(y)+1, \quad \forall\, y \in \mathbf{R}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}(H)(x+1) &= G^{-1}\circ H\circ F(x+1)\\
&= G^{-1}\circ H(F(x)+d)\\
&= G^{-1}(H\circ F(x)+d)\\
&= G^{-1}\circ H\circ F(x)+1\\
&= \mathscr{T}(H)(x)+1, \quad \forall\, x \in \mathbf{R},
\end{aligned}$$

即 $\mathscr{T}:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$. 又记

$$\mu = \inf_{x\in\mathbf{R}} |G'(x)|.$$

注意到命题 7.2.1, 有 $\mu>1$, 即

$$0<\mu^{-1}<1,$$

以及

$$\begin{aligned}
&D(\mathscr{T}(H),\mathscr{T}(K))\\
&= \sup_{x\in\mathbf{R}} |G^{-1}\circ H\circ F(x) - G^{-1}\circ K\circ F(x)|\\
&\leqslant \sup_{y\in\mathbf{R}} |(G^{-1})'(y)| \sup_{x\in\mathbf{R}} |H(F(x)) - K(F(x))|\\
&\leqslant \mu^{-1} \sup_{x\in\mathbf{R}} |H(x)-K(x)|\\
&= \mu^{-1}D(H,K)
\end{aligned}$$

知 $\mathscr{T}:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ 是压缩映射, 故存在唯一的 $H\in\mathscr{H}$, 使得 $H=G^{1}\circ H\circ F$, 即

$$G\circ H = H\circ F. \tag{7.2.1}$$

类似可证存在唯一的 $K\in\mathscr{H}$ 使

$$K\circ G = F\circ K. \tag{7.2.2}$$

由于 $L=id$ 是算子方程

$$L\circ F = F\circ L$$

的唯一解, 故由(7.2.1)和(7.2.2)知 $H:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一个同胚, $H^{-1}=K$. 于是, 由命题 2.5.2, H 可决定 S^1 上的一个保向同胚 $h:S^1\to S^1$, 使

$$E\circ H = h\circ E,$$

其中 $E:\mathbf{R}\to S^1$ 如命题 2.5.1 所定义. 由于

$$E\circ F = f\circ E, \quad E\circ G = g\circ E,$$

再联合(7.2.1), 易证

$$h\circ f\circ E = g\circ h\circ E,$$

从而

$$h\circ f = g\circ h$$

成立. □

定理 7.2.2 若 $f \in C^r(S^1, S^1)$是扩张映射,则 f 是结构稳定的.

证明 设 $g \in C^r(S^1, S^1)$是C^r-ε接近于f的,只要ε充分小,由命题7.2.2,g是扩张映射且

$$\deg(g) = \deg(f).$$

由定理7.2.1,g与f拓扑共轭,即 f 是结构稳定的. □

§7.3 环面双曲同构的结构稳定性

本节介绍的环面双曲自同构,是 Thom 构造的一类结构稳定性的例子.

设二维环面 T^2 如例2.1.3.显然

$$[(x, y)] = ([x], [y]), \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

即 $T^2 = T^1 \times T^1$,其中,T^1 是一维环面,即例7.1.1所定义的圆周.

在 T^2 上定义加法和数乘运算为

$$[x] + [y] = [x + y], \quad \forall [x], [y] \in T^2,$$
$$a[x] = [ax], \quad \forall a \in \mathbf{R}, [x] \in T^1,$$

使 T^2 成为线性空间.

设平面 $\mathbf{R}^2$ 上的线性变换

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

满足条件

(A1)$a_{ij} \in \mathbf{Z}, i, j = 1, 2$.

(A2)$\det A = \pm 1$.

(A3)A 的特征值λ不在复平面的单位圆周上,即$|\lambda| \neq 1$.

记满足上述条件(A1)~(A3)的线性变换 A 组成的集合为 $\mathscr{A}$.

命题 7.3.1 设 $A \in \mathscr{A}$,则

(1)$A^{-1} \in \mathscr{A}$.

(2)A 的特征根λ_1和λ_2都是单实根,且经适当编号后有

$$|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2|. \tag{7.3.1}$$

(3)$\lambda_j (j = 1, 2)$是无理数.

证明 设 $A \in \mathscr{A}$.

证结论(1) 核验 A^{-1}满足条件(A1)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix};$$

核验条件(A2)

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \pm 1;$$

核验条件(A3)　因为 A^{-1}的特征值都是 A 的特征值的倒数,故$(\lambda^{-1})\neq 1$.

证结论(2)　设 λ_1 和 λ_2 是 A 的特征值,则

$$|\lambda_1| \cdot |\lambda_2| = |\det A| = 1,$$

由条件(A3),有$|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$,故 λ_1 和 λ_2 只能是实单根,且适当编号后有(7.3.1)成立.

证结论(3)　设 λ_1 和 λ_2是 A 的特征方程

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{12})\lambda + \det A = 0$$

的根,则由

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \pm 1, \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{12} \in \mathbf{Z}$$

知 λ_1 和 λ_2 不可能是有理数. □

通常称条件(A3)为"双曲性条件",(7.3.1)式意味着映射 A 沿一个方向的作用是扩张的,沿另一个方向的作用是压缩的.由于 $A^{-1}\in\mathscr{A}$,故映射

$$A:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$$

是同构映射,称为双曲自同构.显然

$$A:\mathbf{Z}^2\to\mathbf{Z}^2$$

也是同构映射.若 $x, x'\in\mathbf{R}^2$,且 $x\sim x'$即$x-x'\in\mathbf{Z}^2$,易证

$$Ax \sim Ax'.$$

从而,$A\in\mathscr{A}$可以诱导出一个映射 $f: T^2\to T^2$ 使

$$f([x]) = \{Ax' | x' \in [x]\} = [Ax], \quad \forall [x] \in T^2.$$

由于 $A^{-1}\in\mathscr{A}$,故 f^{-1}存在,易知 $f: T^2\to T^2$ 是线性同构.

定义 7.3.1　设 $A\in\mathscr{A}$,称 A 所导出的环面自映射

$$f: T^2 \to T^2$$

为环面 T^2 的双曲线性自同构.

首先给出环面 T^2 双曲自同构的性质.

定理 7.3.1　设 $f: T^2\to T^2$ 是由 $A\in\mathscr{A}$导出的环面双曲自同构,则

$$\mathrm{Per}(f) = Q^2/\sim, \tag{7.3.2}$$

其中 Q^2 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有理点集;从而,f 的周期点集和非周期点集都在 T^2 中稠;并且

$$\Omega(f) = T^2.$$

证明　如果(7.3.2)成立,则

$$\overline{\mathrm{Per}(f)} = \overline{Q^2/\sim} = T^2.$$

从而

$$T^2 = \overline{\mathrm{Per}(f)} \subset \Omega(f) \subset T^2.$$

故只须证(7.3.2)式成立即可.

任取$[x]\in Q^2/\sim$.记

$$[x]=\left\{\left(\frac{m'_1}{l_1}+p_1,\frac{m'_2}{l_2}+p_2\right)^{\mathrm{T}}\middle| p_1,p_2\in\mathbf{Z}\right\}$$

$$=\left\{\left(\frac{m_1}{[l_1,l_2]}+p_1,\frac{m_2}{[l_1,l_2]}+p_2\right)^{\mathrm{T}}\middle| p_1,p_2\in\mathbf{Z}\right\},$$

其中,$l_j,m_j\in\mathbf{Z}_+$,$l_j\neq 0$,$0\leqslant m_j<[l_1,l_2]$,$j=1,2$;$[l_1,l_2]$是l_1和l_2的最小公倍数.注意到,对任一$n\in\mathbf{N}$有

$$A^n\begin{pmatrix}\dfrac{m_1^{(n)}}{[l_1,l_2]}+p_1^{(n)}\\[2ex]\dfrac{m_2^{(n)}}{[l_1,l_2]}+p_2^{(n)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{m_1^{(n+1)}}{[l_1,l_2]}+p_1^{(n+1)}\\[2ex]\dfrac{m_2^{(n+1)}}{[l_1,l_2]}+p_2^{(n+1)}\end{pmatrix},$$

其中$0\leqslant m_j^{(n)}<[l_1,l_2]$,$p_j^{(n)}\in\mathbf{Z}$,由于满足条件$0\leqslant m_j^{(n)}<[l_1,l_2]$,$j=1,2$,$n=0,1,\cdots$的$m_j^{(n)}(j=1,2)$只有有限个数,故存在$k\in\mathbf{N}$,使

$$A^kx=x,$$

其中$x\in[x]$;故

$$f^k([x])=[x],\tag{7.3.3}$$

即

$$Q^2/\sim\subseteq\mathrm{Per}(f).\tag{7.3.4}$$

另一方面,设$[x]\in\mathrm{Per}(f)$,则存在$k\in\mathbf{N}$使(7.3.3)成立,即

$$(A^k-I)x=y\in\mathbf{Z}^2,$$

其中I是二阶单位方阵.由条件(A3),$(A^k-I)^{-1}$存在,并且$(A^k-I)^{-1}$的元素为有理数,故

$$x=(A^k-I)^{-1}y\in Q^2,$$

即

$$[x]\in Q^2/\sim$$

或

$$\mathrm{Per}(f)\subseteq Q^2/\sim,$$

联合(7.3.4)式,有(7.3.2)式成立. □

下面讨论环面T^2上双曲自同构f的结构稳定性.

定义 7.3.2 设$f,g:T^2\to T^2$分别是由$A,B\in\mathscr{A}$导出的映射,如果

$$\|A-B;C^1\|<\varepsilon,$$

则称f与g是C^1-ε接近的.

引理 7.3.1 设$f:T^2\to T^2$是由$A\in\mathscr{A}$导出的映射,则对任一$\varphi\in C^1(T^2,T^2)$,同调方程

$$\eta\circ f-f\circ\eta=\varphi$$

在 $C^0(T^2, T^2)$内存在解 $\eta\in C^0(T^2, T^2)$. 若记 $L\eta=\eta\circ f-f\circ\eta$, 则线性算子 L 的逆 L^{-1}存在, 且

$$\| L^{-1} \| \leqslant \frac{1}{1-|\lambda_2|}.$$

证明 由命题 7.3.1, 设 $A\in\mathscr{A}$的特征值 λ_1 和 λ_2 满足(7.3.1), e_1 和 e_2 分别是 A 对应于特征值λ_1 和 λ_2 的特征向量, E_1 和 E_2 分别是 e_1 和 e_2 张成的特征子空间, 也是 A 的不变子空间. 于是, $\mathbf{R}^2$ 有直和分解

$$\mathbf{R}^2 = E_1 \oplus E_2,$$

且

$$T^2 = \mathbf{R}^2/\sim = E_1/\sim \oplus E_2/\sim.$$

设 $x\in\mathbf{R}^2$ 表示为

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2,$$

其中 $\zeta_1, \zeta_2\in\mathbf{R}$, 且

$$[x] = [\zeta_1 e_1] + [\zeta_2 e_2].$$

于是

$$f([x]) = \zeta_1[Ae_1] + \zeta_2[Ae_2] = \lambda_1[\zeta_1 e_1] + \lambda_2[\zeta_2 e_2],$$

从而,

$$f\circ\eta([x]) = \lambda_1\eta_1([x]) + \lambda_2\eta_2([x]),$$

其中 $\eta_j([x])$是 $\eta([x])$在不变子空间 $E_j/\sim$上的投影, $j=1,2$. 将同调方程分别投影到两个不变子空间上, 得到与同调方程等价的两个方程:

$$\eta_j\circ f - \lambda_j\eta_j = \varphi_j, \qquad j = 1,2, \tag{7.3.5}$$

其中 φ_j 的定义与 η_j 类似. 定义算子 $W\in C^0(T^2, T^2)$为

$$W:\eta \mapsto \eta\circ f,$$

于是(7.3.5)为

$$(W - \lambda_j\cdot id)\eta_j = \varphi_j, \quad j = 1,2. \tag{7.3.6}$$

显然, (7.3.6)的解就是(7.3.5)的解.

注意到

$$\max_{[x]\in T^2} \| \eta\circ f([x]) \| = \max_{[x]\in T_2} \| \eta([x]) \|,$$

易证 $\| W \| =1$; 显然 W^{-1}存在, 故 $\| W^{-1} \| =1$.

因为 $|\lambda_1| > 1 = \| W \|$, 于是 $(W-\lambda_1\cdot id)^{-1}$存在, 故 $j=1$时, 方程(7.3.6)有解 η_1, 且

$$\| (W-\lambda_1\cdot id)^{-1} \| \leqslant \frac{1}{|\lambda_1| - \| W \|} = \frac{|\lambda_2|}{1-|\lambda_2|};$$

又由

$$W - \lambda_2 \cdot id = \lambda_2 W(\lambda_1 \cdot id - W^{-1}),$$

且 $W^{-1} = 1 < |\lambda_1|$，有$(\lambda_1 \cdot id - W^{-1})^{-1}$存在，从而$(W - \lambda_2 \cdot id)^{-1}$存在，故 $j = 2$ 时，方程(7.3.6)有解 η_2，且

$$\|(W - \lambda_2 \cdot id)^{-1}\| \leqslant |\lambda_2^{-1}| \cdot \|W^{-1}\| \|(\lambda_1 \cdot id - W^{-1})^{-1}\|$$

$$\leqslant \frac{1}{|\lambda_2|} \frac{1}{|\lambda_1| - \|W^{-1}\|}$$

$$= \frac{1}{1 - |\lambda_2|}.$$

由此可证

$$\|L^{-1}\| < \frac{1}{1 - |\lambda_2|}. \qquad \square$$

定理 7.3.2 由 $A \in \mathscr{A}$导出的环面 T^2 上的双曲线性自同构 f 在C^1 拓扑下是结构稳定的.

证明 设 f, g 分别是$A, B \in \mathscr{A}$导出的环面 T^2 上的双曲线性自同构，且是 C^1-ε 充分接近的. 要证存在同胚 $h: T^2 \to T^2$，使

$$h \circ f = g \circ h.$$

记

$$h = id + \eta, \qquad \eta \in C^0(T^2),$$
$$g = f + \varphi, \qquad \varphi \in C^1(T^2),$$

其中 η 和微分同胚φ 都是双 1 周期函数. 于是

$$(f + \varphi) \circ (id + \eta) = (id + \eta) \circ f,$$

即

$$\eta \circ f - f \circ \eta = \varphi \circ (id + \eta). \tag{7.3.7}$$

只需证，当 φ 充分小时以上方程有解η. 定义 $C^0(T^2, T^2)$上的算子 L 为

$$L\eta = \eta \circ f - f \circ \eta.$$

显然，L 是线性算子. 由引理 7.3.1，线性算子 L^{-1}存在，且

$$\|L^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - |\lambda_2|}.$$

再定义 $C^0(T^2, T^2)$上的算子 G 为

$$G\eta = \varphi \circ (id + \eta) - \varphi.$$

于是，算子方程(7.3.7)化为

$$L\eta = G\eta + \varphi$$

或

$$\eta = L^{-1}G\eta + L^{-1}\varphi.$$

记

$$\mathcal{T}\eta = L^{-1}G\eta + L^{-1}\varphi.$$

下证算子 $\mathcal{T}$ 是 $C^0(T^2, T^2)$ 中的压缩映射. 事实上, 由于 f 与 g 是充分接近的, 故可设

$$\| \varphi; C^1 \| < \alpha(1 - |\lambda_2|),$$

其中 $0<\alpha<1$. 设 $\eta^{(1)}, \eta^{(2)} \in C_0(T^2, T^2)$, 于是

$$\begin{aligned} \| \mathcal{T}\eta^{(1)} - \mathcal{T}\eta^{(2)} \| &= \| L^{-1}G\eta^{(1)} - L^{-1}G\eta^{(2)} \| \\ &\leqslant \frac{1}{1 - |\lambda_2|} \| G\eta^{(1)} - G\eta^{(2)} \| . \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \| G\eta^{(1)} - G\eta^{(2)} \| &= \max_{[x]\in T^2} \| \varphi([x] + \eta^{(1)}([x])) - \varphi([x] \\ &\quad + \eta^{(2)}([x])) \| \\ &\leqslant \max_{[x]\in T^2} \| D\varphi([x] + \theta(\eta^{(1)}([x]) - \eta^{(2)}([x]))) \| \\ &\quad \cdot \| \eta^{(1)}([x]) - \eta^{(2)}([x]) \| \\ &\leqslant \| \varphi; C^1 \| \cdot \| \eta^{(1)} - \eta^{(2)} \| \\ &< \alpha(1 - |\lambda_2|) \| \eta^{(1)} - \eta^{(2)} \| , \end{aligned}$$

故

$$\| \mathcal{T}\eta^{(1)} - \mathcal{T}\eta^{(2)} \| < \alpha \| \eta^{(1)} - \eta^{(2)} \| .$$

从而, 压缩映射 $\mathcal{T}$ 在 $C^0(T^2, T^2)$ 中存在唯一的不动点 η, 即(7.3.7)有解 η. 所以, 存在 $h: T^2 \to T^2$, 使

$$h \circ f = g \circ h$$

成立. 下证 h 是同胚.

由于 h 是紧空间 T^2 上的连续映射, 故只需证 h 是 T^2 上的双射. 由于 η 是连续的双 1 周期映射, 易知 $h = id + \eta$ 在 T^2 上是满射. 下证 h 是单射.

设 $[x], [y] \in T^2$, 使 $h([x]) = h([y])$, 于是

$$h \circ f([x]) = g \circ h([x]) = g \circ h([y]) = h \circ f([y]),$$

或

$$h \circ f^n([x]) = h \circ f^n([y]).$$

利用 $h = id + \eta$, 使上式化为

$$f^n([x - y]) = \eta \circ f^n([y]) - \eta \circ f^n([x]).$$

如果 $[x] \neq [y]$, 由 A 的双曲性有

$$A^n(x - y) \to \infty, \quad \text{当 } n \to \pm\infty,$$

这与 η 的有界性矛盾, 故 η 是单射. □

第八章 双曲不动点的局部稳定性

双曲周期轨道的局部动力性状,归结为研究双曲不动点邻域的映射的拓扑结构.描述这种局部性质的基本结论,是 Hartman-Grobman 局部线性化定理和稳定流形定理.20 世纪 60 年代初 Hartman[98][99]和 Grobman[100]各自独立地在 m 维流形上证明了线性化定理,指出映射在双曲不动点附近与其在该点的切映射(导算子)是拓扑共轭的.后来 Palis[101]和 Pugh[102]又在 Banach 流形的框架里证明了该定理.Hadamard-Perron 局部稳定流形定理,仍然是研究双曲不动点邻域内的局部性质,故可在 Banach 空间的框架里叙述.值得指出的是,对这一定理的改进性工作,还有 Stornborg[103]、Abraham 和 Robbin[104]等.同样,对 m 维微分流形上 C^r 同胚和流,也有相应的全局稳定流形定理和不稳定流形定理,可见 Smale 等人的工作.

§8.1 双曲线性映射

设$(E, \|\cdot;E\|)$是 Banach 空间,在意义明确之处,简记该范数为$\|\cdot\|$.又设 $E_1\subset E$ 和$E_2\subset E$ 是E 的闭线性子空间,记 E 关于E_1 和 E_2 的直和为

$$E = E_1 \oplus E_2,$$

其定义是对任一 $x\in E$ 可唯一地表示为

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in E_1, x_2 \in E_2.$$

定义 8.1.1 Banach 空间 E 上的线性可逆映射$A:E\to E$ 称为双曲线性映射,如果

$$E = E^u \oplus E^s, \quad AE^u = E^u, \quad AE^s = E^s, \tag{8.1.1}$$

且存在常数 $c_u, c_s>0$ 和 $0<\mu<1$ 使得

$$\| A^k x_u \| \geqslant c_u \mu^{-k} \| x_u \|, \quad \forall x_u \in E^u, k \in \mathbf{N}, \tag{8.1.2}$$

$$\| A^k x_s \| \leqslant c_s \mu^{k} \| x_s \|, \quad \forall x_s \in E^s, k \in \mathbf{N}. \tag{8.1.3}$$

其中闭子空间 E^u 和E^s 分别称为A 的扩张子空间和收缩子空间.

记 E 上双曲线性映射的全体为$H(E)$.又记

$$L(E,E) = \{A \mid A:E \to E \text{ 线性且有界}\}.$$

与(8.1.2)等价的是存在 $\lambda>1$,使

$$\| A^{-k} x_u \| \leqslant c_u^{-1}\lambda^k \| x_u \|, \quad \forall x_u \in E^u, k \in \mathbf{N}, \tag{8.1.2$'$}$$

显然,零子空间是 E 的闭子空间,故允许 E^u 或E^s 退化为零子空间.如果 E^u

退化为零子空间，则对充分大的 $k\in\mathbf{N}$，A^k 在 E 上是压缩映射；如果 E^s 退化为零子空间，同样，A^k 在 E 上是扩张映射.

用 $\mathbf{C}$ 表示复平面，$S^1=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid |\lambda|=1\}$ 是 $\mathbf{C}$ 上的单位圆周.

命题 8.1.1　设 $A:E\to E$ 是双曲线性映射，有如下结论成立

(1) $A^{-1}:E\to E$ 也是双曲线性映射.

(2) 如果 $x\in E\setminus\{0\}$ 且 $\lambda\in S^1$，则 $Ax\neq\lambda x$，特别地，A 的唯一不动点是 $x=0$.

(3) 若 $A\in L(E,E)$ 则 $id-A:E\to E$ 是可逆映射.

证明　证(1)　在(8.1.2)和(8.1.3)中分别以 $A^{-k}x_u$ 和 $A^{-k}x_s$ 代替 x_u 和 x_s 即可.

证(2)　若其不然，存在 $x\in E\setminus\{0\}$ 使 $x=x_u+x_s$ 满足

$$\begin{aligned}\|x\| &= \|A^kx\|\geqslant\|A^kx_u\|-\|A^kx_s\|\\ &\geqslant c_u\mu^{-k}\|x_u\|-c_s\mu^k\|x_s\|,\quad\forall k\in\mathbf{Z}_+.\end{aligned}$$

当 $k\to+\infty$ 时，上式是矛盾的，故结论(2)成立.

证(3)　由结论(2)知 1 不是有界线性算子 A 的特征值，故 $id-A:E\to E$ 是可逆算子([10]，193 页).　□

定理 8.1.1　设 A 是Banach空间 $(E,\|\cdot\|)$ 上的线性可逆映射，则 $A\in H(E)$ 的充分必要条件是：存在 E 的直和分解(8.1.1)，及与范数 $\|\cdot\|$ 等价的范数 $\|\cdot\|_1$ 使得相应的算子范数

$$\|A_u^{-1}\|_1=\|(A|E^u)^{-1}\|_1<1,\tag{8.1.4}$$

$$\|A_s\|_1=\|(A|E^s)\|_1<1.\tag{8.1.5}$$

证明　充分性是显然的，只需取

$$\max\{\|A_u^{-1}\|_1,\|A_s\|_1\}\leqslant\lambda<1,$$

即可证(8.1.2)和(8.1.3). 下证必要性.

对任一 $x=x_u+x_s$，$x_u\in E^u$，$x_s\in E^s$，不妨取

$$\|x\|=\max\{\|x_u\|,\|x_s\|\},$$

作为 E 的等价范数. 由(8.1.2)和(8.1.3)可取 $c>0$，$0<\lambda<1$ 使得

$$\|A^{-k}x_u\|\leqslant c\lambda^k\|x_u\|,\quad\forall x_u\in E^u,k=1,2,\cdots$$

$$\|A^kx_s\|\leqslant c\lambda^k\|x_s\|,\quad\forall x_s\in E^s,k=1,2,\cdots$$

并取充分大的 $p\in\mathbf{N}$ 使 $c\lambda^p<1$. 定义

$$\|x_u\|_1=\sum_{j=0}^{p-1}\|A^{-j}x_u\|,$$

$$\|x_s\|_1=\sum_{j=0}^{p-1}\|A^jx_s\|,$$

$$\|x\|_1 = \max\{\|x_u\|_1, \|x_s\|_1\},$$

不难核验上述定义满足范数的条件，并且与范数 $\|\cdot\|$ 是等价的．同时，有

$$\begin{aligned}\|A^{-1}x_u\|_1 &= \sum_{j=1}^{p}\|A^{-j}x_u\| \\ &= \|x_u\|_1 + \|A^{-p}x_u\| - \|x_u\| \\ &\leqslant \|x_u\|_1 + c\lambda^p\|x_u\| - \|x_u\| \\ &= \|x_u\|_1 - (1 - c\lambda^p)\|x_u\|.\end{aligned}$$

记 $B = 2\left(1 + c\sum_{j=1}^{p-1}\lambda^j\right)$，将

$$\|x_u\|_1 = \|x_u\| + \sum_{j=1}^{p-1}\|A^{-j}x_u\| \leqslant \left(1 + c\sum_{j=1}^{p-1}\lambda^j\right)\|x_u\| \leqslant B\|x_u\|,$$

代入上式，得

$$\|A^{-1}x_u\|_1 \leqslant \mu\|x_u\|_1, \qquad \forall\, x_u \in E^u,$$

其中

$$0 < \mu = 1 - B^{-1}(1 - c\lambda^p) < 1.$$

于是

$$\|A_u^{-1}\|_1 = \|(A|E^u)^{-1}\|_1 \leqslant \mu < 1,$$

即(8.1.4)成立，类似可证(8.1.5)． □

用 I 表示 E 上的恒等算子．对于算子 $A \in L(E,E)$，如果存在 $\lambda \in \mathbf{C}$ 使 $(\lambda I - A)^{-1} \in L(E,E)$，则称 λ 为线性算子 A 的正则点，不是正则点称为 A 的谱点．A 的全体正则点的集合和谱点的集合分别记为 $\rho(A)$ 和 $\sigma(A)$，$\sigma(A) = \mathbf{C}\setminus\rho(A)$．命题 8.1.1 的结论(2)指出．

$$A \in H(E) \Rightarrow \sigma(A) \cap S^1 = \varnothing.$$

事实上，后者也是 $A \in H(E)$ 的充分条件．这需要下面的分解定理[105]．

定理 8.1.2 设 $A \in L(E,E)$ 是 Banach 空间 $(E, \|\ \|)$ 上的可逆线性映射，如果

$$\sigma(A) \cap S^1 = \varnothing,$$

则存在 E 上的直和分解(8.1.1)，并且存在一个与 $\|\cdot\|$ 等价的范数 $\|\cdot\|_1$ 使得(8.1.4)和(8.1.5)成立．

证明 由 $\sigma(A) \cap S^1 = \varnothing$，可取投影算子

$$P = \frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{S^1}(\lambda I - A)^{-1}\mathrm{d}\lambda,$$

令

$$E^s = PE, \qquad E^u = (I - P)E,$$

由于 P 与 A 可交换，故 E^s 和 E^u 是 A 的不变子空间，且有直和分解(8.1.1)．

有界线性算子 A 的谱集 $\sigma(A)$ 是 $\mathbf{C}$ 中的非空紧集. 由于 S^1 是紧集且无谱点,故将 $\sigma(A)$ 分成两个不相连的部分,一个在单位圆内,一个在单位圆外.

由 $A_s = A|E^s$ 的定义,知 A_s 的谱半径 $r_s<1$,即

$$r_s = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| A_s^n \|} < 1,$$

其中 $A_s^n = (A_s)^n$. 取 $a_1 \in (r_s, 1)$,由

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^{-n} \| A_s^n \|} = a_1^{-1} r_s < 1,$$

知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_1^{-n} \| A_s^n \|$ 收敛. 令

$$\| x_s \|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_1^{-n} \| A_s^n(x_s) \|, \quad \forall x_s \in E^s,$$

是 E^s 上的范数. 同理 $(A_u)^{-1}$ 的谱半径 $r_u<1$,取 $a_2 \in (r_u, 1)$,令

$$\| x_u \|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_2^{-n} \| (A_u)^{-n}(x_u) \|, \quad \forall x_u \in E^u,$$

是 E^u 上的范数. 对任一 $x \in E$,使 $x = x_s + x_u$, $x_s \in E^s$, $x_u \in E^u$. 令

$$\| x \|_1 = \max(\| x_s \|_1, \| x_u \|_1),$$

是 E 上的范数. 又

$$\begin{aligned} \| A_s(x_s) \|_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_1^{-n} \| A_s^{n+1}(x_s) \| \\ &= a_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_1^{-n} \| A_s^n(x_s) \| \\ &\leqslant a_1 \| x_s \|_1, \quad \forall x_s \in E^s, \end{aligned}$$

故

$$\| A_s \|_1 = \| A|E_s \|_1 \leqslant a_1 < 1.$$

同理可证

$$\| A_u^{-1} \|_1 = \| (A|E^u)^{-1} \|_1 \leqslant a_2 < 1.$$

且由

$$\| x_s \| \leqslant \| x_s \|_1 \leqslant \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_1^{-n} \| A_s^n \| \Big) \| x_s \|, \forall x_s \in E^s$$

知其范数的等价性;同理可证 E^u 上的情况. □

定理 8.1.3 设 $A \in L(E, E)$ 在 Banach 空间 E 上可逆,则

$$A \in H(E) \Leftrightarrow \sigma(A) \cap S^1 = \varnothing. \tag{8.1.6}$$

证明 必要性是命题 8.1.1 的结论(2),充分性由定理 8.1.1 和 8.1.2 直接可得. □

在有的文献中,利用定理 8.1.3 给出可逆线性映射的双曲性的定义.

下面的讨论将指出可逆线性映射的双曲性是小扰动下的不变性质.

设 Banach 空间$(E, \|\cdot\|)$有直和分解

$$E = E_1 \oplus E_2, \tag{8.1.7}$$

而线性映射 $B \in L(E, E)$可表示为

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}: E_1 \oplus E_2 \to E_1 \oplus E_2. \tag{8.1.8}$$

对任一 $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 \in E$, 存在 $\eta = \eta_1 + \eta_2 \in E$ 使 $B\zeta = \eta$ 满足

$$\begin{cases} \eta_1 = B_{11}\zeta_1 + B_{12}\zeta_2, \\ \eta_2 = B_{21}\zeta_1 + B_{22}\zeta_2, \end{cases} \tag{8.1.9}$$

其中, B_{11}可逆, $\zeta_1, \eta_1, \in E_1, \zeta_2, \eta_2 \in E_2$.

引理 8.1.1 在上述记号下, 如果存在$0 < \lambda < 1, 0 < \varepsilon < \min\{1 - \lambda, \lambda^{-1} - 1\}$使

$$\max\{\|B_{11}^{-1}\|, \|B_{22}\|\} < \lambda,$$
$$\max\{\|B_{12}\|, \|B_{21}\|\} < \varepsilon,$$

则存在 $P \in L(E, E)$满足条件

(1) $\|P\| \leqslant \mu = \dfrac{\lambda + \varepsilon}{\lambda^{-1} - \varepsilon} < 1$.

(2) P 的图像 $F_1 = (id, P)E_1 \subset E$, 且对 B 不变.

(3) $\|B\zeta\|_1 \geqslant (\lambda^{-1} - \varepsilon)\|\zeta\|_1, \forall \zeta \in F_1$, 其中

$\|\eta\|_1 = \max\{\|\eta_1\| \; \|\eta_2\|\}, \quad \forall \eta = \eta_1 + \eta_2, \eta_1 \in E_1, \eta_2 \in E_2.$

证明 记

$$L_1(E_1, E_2) = \{S \in L(E_1, E_2) \mid \|S\| \leqslant 1\},$$

定义映射 $\mathcal{T}: L_1(E_1, E_2) \to L(E_1, E_2)$为

$$\mathcal{T}(S) = (B_{21} + B_{22}S)(B_{11} + B_{12}S)^{-1}, \forall S \in L_1(E_1, E_2).$$

对 $S \in L_1(E_1, E_2)$, 有

$$\|B_{12}S\| \leqslant \|B_{12}\| < \varepsilon < \lambda^{-1} < \|B_{11}^{-1}\|^{-1}.$$

故 $B_{11} + B_{12}S$ 可逆, 从而映射 $\mathcal{T}$的定义是恰当的. 由

$$\begin{aligned} \|(B_{11} + B_{12}S)^{-1}\| &\leqslant \|B_{11}^{-1}\| \cdot \|(I + B_{11}^{-1}B_{12}S)^{-1}\| \\ &\leqslant \frac{\|B_{11}^{-1}\|}{1 - \|B_{11}^{-1}\| \cdot \|B_{12}S\|} \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda^{-1} - \varepsilon}, \end{aligned} \tag{8.1.10}$$

有

$$\|\mathcal{T}(S)\| \leqslant \frac{\varepsilon + \lambda}{\lambda^{-1} - \varepsilon} = \mu < 1, \quad \forall S \in L_1(E_1, E_2), \tag{8.1.11}$$

故

$$\mathscr{T}: L_1(E_1, E_2) \to L_1(E_1, E_2)$$

且是压缩的. 事实上, 记

$$\theta_2(S) = B_{21} + B_{22}S,$$
$$\theta_1(S)^{-1} = (B_{11} + B_{12}S)^{-1},$$

对 $S_1, S_2 \in L_1(E_1, E_2)$, 有

$$\begin{aligned}
&\mathscr{T}(S_1) - \mathscr{T}(S_2) \\
&= \theta_2(S_1)\theta_1(S_1)^{-1} - \theta_2(S_2)[\theta_1(S_1)^{-1} + \theta_1(S_2)^{-1} - \theta_1(S_1)^{-1}] \\
&= [\theta_2(S_1) - \theta_2(S_2)]\theta_1(S_1)^{-1} - \theta_2(S_2)\theta_1(S_2)^{-1}[\theta_1(S_1) \\
&\quad - \theta_1(S_2)]\theta_1(S_1)^{-1} \\
&= [B_{22} - \mathscr{T}(S_2)B_{12}](S_1 - S_2)(B_{11} + B_{12}S_1)^{-1}.
\end{aligned}$$

再利用(8.1.10)和(8.1.11), 有

$$\begin{aligned}
&\| \mathscr{T}(S_1) - \mathscr{T}(S_2) \| \\
&\leqslant (\| B_{22} \| + \| \mathscr{T}(S_2) \| \cdot \| B_{12} \|) \| (B_{11} + B_{12}S_1)^{-1} \| \cdot \| S_1 - S_2 \| \\
&\leqslant \frac{\lambda + \varepsilon}{\lambda^{-1} - \varepsilon} \| S_1 - S_2 \|, \qquad \forall S_1 S_2 \in L_1(E_1, E_2).
\end{aligned}$$

由 $\mu = \dfrac{\lambda + \varepsilon}{\lambda^{-1} - \varepsilon} < 1$, 知 $\mathscr{T}$ 是压缩的. 故存在唯一不动点 $P \in L_1(E_1, E_2)$ 使 $\mathscr{T}(P) = P$. 下证 P 即为所求.

(1)由(8.1.11)有

$$\| P \| = \| \mathscr{T}(S) \| = \mu < 1$$

成立.

(2)对 BF_1 中任一点, 存在 $\zeta = (\zeta_1, P\zeta_1) \in F_1$, 使该点为 $B\zeta$, 记 $B\zeta = \eta = (\eta_1, \eta_2)$, $\eta_1 \in E_1$, $\eta_2 \in E_2$. 于是, 由(8.1.9)和 $\mathscr{T}$ 的定义, 有

$$\eta_2 = (B_{21} + B_{22}P)(B_{11} + B_{12}P)^{-1}\eta_1 = P\eta_1,$$

故 $B\zeta = (\eta_1, P\eta_1) \in F_1$, 即 $BF_1 \subset F_1$. 另一方面, 对任一$(\eta_1, P\eta_1) \in F_1$, 取

$$\zeta_1 = (B_{11} + B_{12}P)^{-1}\eta_1 \in E_1,$$

容易验证

$$B(\zeta_1, P\zeta_1)^{\mathrm{T}} = (\eta_1, P\eta_1)^{\mathrm{T}},$$

即 $F_1 \subset BF_1$; 从而 F_1 是 B 的不变集.

(3)对任一 $\zeta \in F_1$, 由(8.1.10)式有

$$\begin{aligned}
\| \zeta \|_1 &= \max\{ \| \zeta_1 \| \ \| P\zeta_1 \| \} = \| \zeta_1 \| \\
&= \| (B_{11} + B_{12}P)^{-1}(B_{11} + B_{12}P)\zeta_1 \| \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda^{-1} - \varepsilon} \| (B_{11} + B_{12}P)\zeta_1 \|
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\lambda^{-1} - \varepsilon} \| B\zeta \|_1,$$

成立. □

定理 8.1.4 设 $H(E)$是 Banach 空间$(E, \| \ \|)$中双曲线性映射的集合,则 $H(E)$是 $L(E,E)$中的开集.

证明 任取 $A \in H(E)$, E 关于A 的闭不变子空间分解为

$$E = E_1 \oplus E_2,$$

对任一 $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2, \zeta_1 \in E_1, \zeta_2 \in E_2$,不妨设其范数为

$$\| \zeta \| = \max\{ \| \zeta_1 \|, \| \zeta_2 \| \},$$

于是由定理 8.1.1,有

$$\| A_{11}^{-1} \| = \| (A|E_1)^{-1} \| \leqslant \tau < 1,$$

$$\| A_{22} \| = \| (A|E_2) \| \leqslant \tau < 1.$$

取 $\varepsilon > 0$ 充分小,使得

$$\tau + 2\varepsilon < 1.$$

任取可逆映射 $B \in L(E,E)$,满足条件

$$\| B - A \| < \varepsilon/k, \quad \| B^{-1} - A^{-1} \| < \varepsilon/k,$$

其中常数 $k>1$,设 B 和$B^{-1}: E_1 \oplus E_2 \to E_1 \oplus E_2$ 表示为

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} \widetilde{B}_{11}, & \widetilde{B}_{12} \\ \widetilde{B}_{21}, & \widetilde{B}_{22} \end{bmatrix},$$

其中 $B_{11}^{-1}, \widetilde{B}_{22}^{-1}$存在.只要 k 足够大,就有

$$\| B_{11}^{-1} - A_{11}^{-1} \|, \quad \| B_{12} \|, \| B_{21} \|, \| B_{22} - A_{22} \| < \varepsilon,$$

$$\| \widetilde{B}_{11} - A_{11}^{-1} \|, \| \widetilde{B}_{12} \|, \| \widetilde{B}_{21} \|, \| \widetilde{B}_{22}^{-1} - A_{22} \| < \varepsilon.$$

记 $\lambda = \tau + \varepsilon$,有

$$0 < \lambda < 1, \quad 0 < \varepsilon < \min\{1 - \lambda, \lambda^{-1} - 1\},$$

且

$$\max\{ \| B_{11}^{-1} \|, \| B_{22} \| \} < \lambda, \quad \max\{ \| B_{12} \| \ \| B_{21} \| \} < \varepsilon,$$

和

$$\max\{ \| \widetilde{B}_{11} \|, \| \widetilde{B}_{22}^{-1} \| \} < \lambda, \quad \max\{ \| \widetilde{B}_{12} \|, \| \widetilde{B}_{21} \| \} < \varepsilon.$$

由引理 8.1.1,存在 $P \in L(E_1, E_2)$, $Q \in L(E_1, E_2)$满足条件

(1) $\| P \| \leqslant \mu < 1$, $\| Q \| \leqslant \mu < 1$.

(2)$F_1 = (id_1, P)E_1$, $F_2 = (Q, id_2)E_2$ 是 B 的不变集,且由于定义域是闭集的连续算子是闭算子,故 F_1 和 F_2 是 E 的闭子空间.

(3) $\| B\zeta \| \geqslant (\lambda^{-1} - \varepsilon) \| \zeta \|$, $\forall \zeta \in F_1$,

$\| B^{-1}\eta \| \geqslant (\lambda^{-1} - \varepsilon) \| \eta \|$, $\forall \eta \in F_2$.

由上面的条件(3),立即可得

$$\| B_1^{-1} \| = \| (B|F_1)^{-1} \| \leqslant (\lambda^{-1} - \varepsilon)^{-1} < 1,$$

$$\| B_2 \| = \| (B|F_2) \|^{-1} \leqslant (\lambda^{-1} - \varepsilon)^{-1} < 1.$$

如果

$$E = F_1 \oplus F_2. \tag{8.1.12}$$

联合上两式,按定理 8.1.1 有 $B \in H(E)$,即 $H(E)$是 $L(E,E)$中的开集.

下证(8.1.12).任取 $x \in E$,使 $x = x_1 + x_2, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$,现定义映射 $\mathcal{T}: E_1 \oplus E_2 \to E_1 \oplus E_2$ 为

$$\mathcal{T}(y, z) = (x_1 - Qz, x_2 - Py), \quad \forall y \in E_1, z \in E_2$$

由条件(1),易证 $\mathcal{T}$是 $E_1 \oplus E_2$ 到自身的压缩映射,故存在唯一的不动点使

$$y = x_1 - Qz, \quad z = x_2 - Py.$$

从而

$$x = x_1 + x_2 = (y + Py) + (z + Qz),$$

其中$(y, Py) \in F_1, (Qz, z) \in F_2$,故(8.1.12)成立. □

该定理说明充分靠近双曲线性映射的可逆线性映射是双曲的.

§8.2 $\mathbf{R}^m$ 空间上的线性系统

$\mathbf{R}^m$ 到自身的线性算子集 $L(\mathbf{R}^m)$,赋以恰当的范数而成为 Banach 空间;又记 $\mathbf{R}^m$ 上所有线性自同构组成的集合为 $GL(\mathbf{R}^m)$. 设 $A \in L(\mathbf{R}^m)$,定义 A 在复向量空间 $\mathbf{C}^m$ 上的扩张映射 $\widetilde{A}: \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m$ 为

$$\widetilde{A}(u + iv) = A(u) + \mathrm{i}A(v), \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^m.$$

又称 $\widetilde{A}$ 的谱为 A 的复谱,其谱集合记为 $\sigma(\widetilde{A})$.

$\widetilde{A}$ 的 Jordan 标准型记为

$$\mathrm{diag}(A_1, \cdots, A_r), \tag{8.2.1}$$

其中

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_j \end{pmatrix}, \qquad j = 1, \cdots, r.$$

λ_j 是$\widetilde{A}$ 的复特征值.对于 $A \in L(\mathbf{R}^m)$,可在 $\mathbf{R}^m$ 上可选择一组基,使 A 的矩阵表示为

$$\mathrm{diag}(A_1, \cdots, A_r, B_1, \cdots, B_s), \tag{8.2.2}$$

其中 A_j 同前式,仅 $\lambda_j \in \mathbf{R}, j=1,\cdots,r$,又

$$B_j = \begin{pmatrix} c_j & & & \\ I & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I & c_j \end{pmatrix}, \qquad j = 1, \cdots, s,$$

$$C_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_j, \beta_j \in \mathbf{R}.$$

若不考虑排列次序,则(8.2.1)和(8.2.2)是唯一确定的.

定义 8.2.1 线性映射 $A \in L(\mathbf{R}^m)$称为双曲的,若 $\sigma(\tilde{A})$与虚轴不交;此时,A 的有负实部的特征值的个数称为 A 的指数.

定义 8.2.2 可逆映射 $A \in GL(\mathbf{R}^m)$称为双曲的,若

$$\sigma(\tilde{A}) \cap S^1 = \varnothing,$$

此时,称 A 在S^1 内的特征值的个数称为 A 的指数.

$\mathbf{R}^m$ 上所有双曲线性自同构组成的集合记作$H(\mathbf{R}^m)$.

定理 8.2.1 (分解定理) 若 $A \in L(\mathbf{R}^m)$是双曲的,则存在 $\mathbf{R}^m$ 的唯一直和分解

$$\mathbf{R}^m = E^s \oplus E^u, \quad AE^s = E^s, \quad AE^u = E^u,$$

$A_s = A|E^s$和$A_u = A|E^u$的特征值实部分别小于零和大于零.特别当$A \in H(\mathbf{R}^m)$时,存在$\mathbf{R}^m$上的一个范数 $\|\cdot;\mathbf{R}^m\|$,使得此范数导出的 $\|A_s\|$ 和 $\|(A_u)^{-1}\|$ 均小于1,从而 A_s 和 A_u的特征值分别在S^1 内和 S^1 外.

证明 只证 $A \in L(\mathbf{R}^m)$的情况.选择 $\mathbf{R}^m$ 的一个组基$e_1, \cdots, e_m$ 使A 表示为

$$\mathrm{diag}[A_1 \cdots A_p B_{p+1} \cdots B_q C_{q+1} \cdots C_s D_{s+1} \cdots D_r],$$

其中 Jordan 块 $A_j(1 \leqslant j \leqslant p)$的主对角线是实特征值 $\lambda_j < 0, j=1,\cdots,p$;而 B_j $(p+1 \leqslant j \leqslant q)$的主对角线是复特征值 $\alpha_j \pm \mathrm{i}\beta_j$ 分解成的小块

$$\begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \quad \alpha_j < 0, j = p+1, \cdots, q;$$

$C_j(q+1 \leqslant j \leqslant s)$的主对角线是实特征值 $\lambda_j > 0$, $j = q+1, \cdots, s$;$D_j(s+1 \leqslant j \leqslant r)$的主对角线是复特征值 $\alpha_j \pm i\beta_j$ 分解成的小块

$$\begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \qquad \alpha_j > 0, j = s+1, \cdots, r.$$

令实部小于 0 的特征值所对应的基底 $e_1, \cdots, e_q$ 生成的子空间为E^s,而实部大

于 0 的特征值所对应的基底 $e_{q+1},\cdots,e_r$ 生成的子空间为 E^u. 显然, E^s 和 E^u 是 A 的不变子空间, 且

$$\mathbf{R}^m = E^s \oplus E^u.$$

同时, A_s 和 A_u 对于基 $\{e_1,\cdots,e_q\}$ 和 $\{e_{q+1},\cdots,e_r\}$ 的矩阵分别是

$$\mathrm{diag}[A_1\cdots A_p B_{p+1}\cdots B_q]$$

和

$$\mathrm{diag}[C_{q+1}\cdots C_s D_{s+1}\cdots D_r]$$

从而 A_s 和 A_u 的特征值实部分别为负实部和正实部. □

这里, 称定理中的 E^s 和 E^u 分别为 A 的稳定子空间和不稳定子空间.

定理 8.2.2　$H(\mathbf{R}^m)$ 是 $GL(\mathbf{R}^m)$ 中的开稠集.

证明　先证 $H(\mathbf{R}^m)$ 是 $GL(\mathbf{R}^m)$ 中的开集. 对任一 $A\in H(\mathbf{R}^m)$ 有

$$\det(\widetilde{A} - \lambda I) \neq 0, \quad \forall \lambda \in S^1,$$

其中 I 是 $\mathbf{R}^m$ 上的恒同映射. 由于映射 $\det: L(\mathbf{C}^m)\to\mathbf{C}$ 连续, 所以存在 $\delta(\lambda)>0$ 与 λ 在 $\mathbf{C}$ 中的一个邻域 U_λ, 使得当 $B\in GL(\mathbf{R}^m)$ 且 $\|B-A\|<\delta(\lambda)$ 及 $\mu\in U_\lambda$ 时, $\det(\widetilde{B}-\mu I)\neq 0$. 因 S^1 紧, 故由 S^1 的开覆盖 $\{U_\lambda|\lambda\in S^1\}$ 可得到有限个 $U_{\lambda_1}\cdots U_{\lambda_s}$ 使得

$$S^1 \subset \bigcup_{j=1}^{s} U_{\lambda_j}.$$

令 $\delta=\min\{\delta(\lambda_1)\cdots,\delta(\lambda_\varepsilon)\}$. 从而, 当 $B\in GL(\mathbf{R}^m)$, $\|B-A\|<\delta$ 时有

$$\det(\widetilde{B} - \mu I) \neq 0, \quad \forall \mu \in S^1,$$

即 $B\in H(\mathbf{R}^m)$. 所以, $H(\mathbf{R}^m)$ 是 $GL(\mathbf{R}^m)$ 中的开集.

下证稠密性. 对任一 $A\in GL(\mathbf{R}^m)$ 及 $\varepsilon>0$ 作

$$U_\varepsilon(A) = \{B \in GL(\mathbf{R}^m) \mid \|B - A\| < \varepsilon\}.$$

设 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$, 其中 $\lambda_{i_1},\cdots,\lambda_{i_s}$ 在 S^1 内. 记

$$\delta_1 = \min\{|\lambda_j| \mid j = 1,\cdots,m\},$$

$$\delta_2 = \min\{1 - |\lambda_{i_t}| \mid t = 1,\cdots,s\},$$

$$\delta_3 = \min\{|\alpha| \mid \alpha + \mathrm{i}\beta \in \sigma(A) \cap S^1, \alpha \neq 0\}.$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$, 显然 $\delta>0$. 取 $0<\mu<\min\{\varepsilon,\delta\}$ 作

$$B = A + \mu I,$$

显然 $B\in U_\varepsilon(A)$, 且特征值 $\lambda_i+\mu \overline{\in} S^1$, $i=1,\cdots,m$, 则 $B\in H(\mathbf{R}^m)$, 故 $H(\mathbf{R}^m)$ 在 $GL(\mathbf{R}^m)$ 稠. □

下面讨论 $A\in L(\mathbf{R}^m)$ 导出的流, 考虑 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax$, $x\in\mathbf{R}^m$ 称 Ax 是 $\mathbf{R}^m$ 上定义的向量场, 简称 A 为线性向量场. 作 $L(\mathbf{R}^m)$ 中的算子序列

$$E_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k, \quad m = 0,1,2\cdots$$

利用 $\| A^k \| \leqslant \| A \|^k$,不难证明 E_m 收敛于 Banach 空间 $L(\mathbf{R}^m)$中的一个线性算子,记作 e^A,

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

显然 $e^{-A} = (e^A)^{-1}$存在.又记

$$A_t = e^{tA} : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m,$$

易知 A_t 是可微的,且 $A'_t = Ae^{tA}$,记 $A_t(x) = e^{tA}x$,是向量场 A 导出的流.也简称 A_t 为流.

定理 8.2.3 设 $A \in L(\mathbf{R}^m)$是双曲向量场,E^s 和E^u 分别是A 的稳定和不稳定子空间,则 $A_t(x)$当 $x \in E^s, t \to +\infty$或 $x \in E^u, t \to -\infty$时趋于原点.

证明 只证$x \in E^s$的情况,记$A_t^s = A_t | E^s$.在A_t中取$t = 1$,由定理 8.1.5,存在 $\mathbf{R}^m$ 中的范数 $\| \cdot ; \mathbf{R}^m \|$ 使

$$\| A_1^s \| = \| (A_1 | E^s) \| < 1.$$

从而当 $x \in E^s$ 时,有

$$\| A_n(x) \| = \| (A_1^s)^n(x) \| \leqslant \| A_1^s \|^n \cdot \| x \| \to 0 \quad (n \to +\infty). \tag{8.2.3}$$

设 $0 \in \mathbf{R}^m$,则$[0,1] \times \{0\}$是 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$ 中的紧集,而 $A_t(x)$是紧集$[0,1] \times \{0\}$上的连续映射,且 $A_t(0) = 0$.于是,任给 $\varepsilon < 0$,存在 $\delta > 0$,有

$$\| y ; \mathbf{R}^m \| < \delta \Rightarrow \| A_t(y) ; \mathbf{R}^m \| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0,1] \tag{8.2.4}$$

成立.于是,对 $\delta > 0$,由(8.2.3)式存在正整数 n_0,当 $n \geqslant n_0$ 时

$$\| A_n(x) ; \mathbf{R}^m \| < \delta.$$

设 $t \geqslant n_0$,记 $t = n + \bar{t}$, $n \geqslant n_0$, $\bar{t} \in [0,1]$,由流的性质

$$A_t(x) = A_{n+\bar{t}}(x) = A_{\bar{t}}(A_n(x)),$$

联合上式及(8.2.4)有

$$\| A_t(x) ; \mathbf{R}^m \| = \| A_{\bar{t}}(A_n(x)) ; \mathbf{R}^m \| < \varepsilon,$$

即 $x \in E^s$, $t \to +\infty$时 $A_t(x) \to 0$.类似可证 $x \in E^u$ 的情况. □

定理8.2.4 空间$\mathbf{R}^m$上全体双曲线性向量场组成的集合$HL(\mathbf{R}^m)$是$L(\mathbf{R}^m)$中的开稠集.

证明 定义映射 $\mathrm{Exp}: L(\mathbf{R}^m) \to GL(\mathbf{R}^m)$为

$$\mathrm{Exp}(A) = e^A,$$

是连续映射.由于$(e^A)^{-1} = e^{-A}$存在,故 $\mathrm{Exp}: HL(\mathbf{R}^m) \to H(\mathbf{R}^m)$有意义,且是满射.由定理8.2.2中$H(\mathbf{R}^m)$是$GL(\mathbf{R}^m)$中的开集,知$HL(\mathbf{R}^m) =$

$\mathrm{Exp}^{-1}(H(\mathbf{R}^m))$是开集.稠密性的证明与定理 8.2.2 类似. □

设$\mathbf{R}^m$上的线性向量场A和B分别导出的流是A_t和B_t，称同胚映射$h:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$是$A_t$和$B_t$的拓扑等价，若$h\circ A_t(x)=B_{s(t)}\circ h(x)$，$\forall t\in\mathbf{R}^m$，其中$s(t)$是$t$的严格单调增函数.这时也简称向量场$A$和$B$是拓扑等价的.这里利用拓扑等价对双曲向量场进行拓扑分类.

引理 8.2.1　设双曲线性向量场$A\in L(\mathbf{R}^m)$的指数为m，则在$\mathbf{R}^m$中存在一个范数$\|\cdot;\mathbf{R}^m\|$，使得在点$x\in S^{m-1}=\{x\in\mathbf{R}^m \mid \|x;\mathbf{R}^m\|=1\}$处有$A(x)$与$S^{m-1}$横截，即

$$r\circ A(x)\neq 0,$$

其中r是S^{m-1}在点x处的法向量.

证明　设双曲线向量场$A\in L(\mathbf{R}^m)$的指数为m，于是可选择一组基$e_1,\cdots,e_m$，使A在这组基下的表示为

$$\mathrm{diag}(A_1\cdots A_r,B_1\cdots B_s),$$

如(8.2.2)所示，其中特征值的实部全为负.令

$$W(t)=\mathrm{diag}(A_1(t),\cdots,A_r(t),B_1(t),\cdots,B_s(t)),\quad t\in\mathbf{R},$$

$$A_j(t)=\begin{pmatrix}\lambda_j&&&\\t&\ddots&&\\&\ddots&\ddots&\\&&t&\lambda_j\end{pmatrix},\qquad \lambda_j<0,j=1\cdots r,$$

$$B_j(t)=\begin{pmatrix}c_j&&&\\tI&\ddots&&\\&\ddots&\ddots&\\&&tI&c_j\end{pmatrix},\qquad c_j=\begin{pmatrix}\alpha_j&\beta_j\\-\beta_j&\alpha_j\end{pmatrix},$$

$$\alpha_j<0,j=1,\cdots,s,$$

使$\mathbf{R}^m$上的线性向量场A_t的矩阵形如$W(t)$.显然在，$x\in S^{m-1}$处，$A_0(x)$与S^{m-1}横截.由于S^{m-1}的紧性，故只要$\varepsilon>0$充分小，$A_\varepsilon(x)$也与S^{m-1}横截.从而，存在$\mathbf{R}^m$的一组基$\{e'_1,\cdots,e'_m\}$使A的矩阵为$W(\varepsilon)$，重新定义内积，令$\langle e'_i,e'_j\rangle=\delta_{ij}$.取此内积给出的范数为$\|\cdot;\mathbf{R}^m\|$即可. □

引理 8.2.2　设A和B是$\mathbf{R}^m$上指数为m的双曲线性向量场，则存在一个拓扑共轭$h:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$使

$$h\circ A_t=B_t\circ h,\quad \forall t\in\mathbf{R},$$

其中A_t和B_t是A和B分别导出的流.

证明　设A和B的指数为m，于是A和B的特征根的实部全为负.由引理 8.2.1 存在$\mathbf{R}^m$上的范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$，使得A和B分别与

$$S_1^{m-1} = \{x \in \mathbf{R}^m \mid \| x \|_1 = 1\}$$

和

$$S_2^{m-1} = \{x \in \mathbf{R}^m \mid \| x \|_2 = 1\}$$

横截.记 A_t 和 B_t 分别是 A 和 B 导出的流.由定理 8.2.3 当 $x \in \mathbf{R}^m \setminus \{0\}$ 时,

$$\lim_{t\to+\infty} A_t(x) = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} |A_t(x)| = \infty,$$

由横截性,$\mathrm{Orb}_{A_t}(x)$ 与 S_1^{m-1} 交于唯一一点,即

$$\exists ! t_0 \in \mathbf{R} \Rightarrow A_{-t_0}(x) \in S_1^{m-1}. \tag{8.2.5}$$

同理,$\mathrm{Orb}_{B_t}(x)$ 与 S_2^{m-1} 交于唯一一点.

定义映射 $\bar{h}: S_1^{m-1} \to S_2^{m-1}$ 为 $\bar{h}(x) = x / \| x \|_2$, $\forall x \in S_1^{m-1}$,显然 $\bar{h}$ 是映 S_1^{m-1} 到 S_2^{m-1} 的同胚.现延拓 $\bar{h}$ 到 $\mathbf{R}^m$ 上,首先令 $\bar{h}(0) = 0$,然后对 $x \in \mathbf{R}^m \setminus (\{0\} \cup S_1^{m-1})$,取(8.2.5)中的 t_0 令

$$h(x) = B_{t_0} \circ \bar{h} \circ A_{-t_0}(x),$$

显然 h^{-1} 存在,且可以证明

$$h \circ A_t = B_t \circ h.$$

下证 $h: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ 连续,对任一 $x \in \mathbf{R}^m \setminus \{0\}$,取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}^m$ 使 $x_n \to x (n\to\infty)$.对 x_n 利用(8.2.5),存在唯一的 t_n 和 $t_0 \in \mathbf{R}$ 使

$$A_{-t_0}(x), A_{-t_n}(x_n) \in S_1^{m-1}, \tag{8.2.6}$$

其中 $t_n \to t_0 (n \to \infty)$.由流的连续性,有

$$A_{-t_n}(x_n) \to A_{-t_0}(x), \quad n \to \infty.$$

由于 $\bar{h}: S_1^{m-1} \to S_2^{m-1}$ 同胚,故利用(8.2.6)有

$$\bar{h}(A_{-t_n}(x_n)) \to \bar{h}(A_{-t_0}(x)), \quad n \to \infty,$$

从而

$$h(x_n) = B_{t_n} \circ \bar{h} \circ A_{-t_n}(x_n) \to B_{t_0} \circ \bar{h} \circ A_{-t_0}(x) = h(x),$$

即 $\bar{h}$ 在 $x \in \mathbf{R}^m \setminus \{0\}$ 处连续.h 在原点的连续性可利用定理 8.2.3 及 S_2^{m-1} 的紧性而得证类似可证 h^{-1} 的连续性. □

定理 8.2.5 设向量场 $A, B \in L(\mathbf{R}^m)$ 是双曲的,则 A 与 B 拓扑等价的充要条件是 A 与 B 的指数相同.

证明 先证充分性.设双曲向量场 A 和 B 的指数为 r, E_A^s, E_B^s 和 E_A^u, E_B^u 分别为 A 和 B 的稳定子空间和不稳定子空间,由定理 8.1.5 证明中稳定子空间的生成,有

$$\dim E_A^s = \dim E_B^s = r, \quad \dim E_A^u = \dim E_B^u = m - r.$$

按引理 8.2.2,存在同胚 $h_s: E_A^s \to E_B^s$ 和 $h_u: E_A^u \to E_B^u$ 使

$$h_s \circ A_t^s = B_t^s \circ h_s, \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

$$h_u \circ A_t^u = B_t^u \circ h_u, \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

其中 $A_t^s = (A|E^s)_t$，其他类似. 又定义映射 $h: E_A^s \oplus E_A^u \to E_B^s \oplus E_B^u$ 为

$$h(x_s + x_u) = h_s(x_s) + h_u(x_u), \quad \forall x = x_s + x_u, x_s \in E^s, x_u \in E^u.$$

显然 h 是 $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ 的同胚，且是从 A_t 到 B_t 的拓扑共轭，事实上，对任意一个 $x = x_s + x_u \in \mathbf{R}^m$，有

$$\begin{aligned} h \circ A_t(x) &= h \circ A_t(x_s + x_u) \\ &= h_s \circ A_t^s(x_s) + h_u \circ A_t^u(x_u) \\ &= B_t^s \circ h_s(x_s) + B_t^u \circ h_u(x_u) \\ &= B_t \circ h(x), \quad \forall t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

故充分性成立.

下证必要性. 由定理 8.2.3 有

$$x \in E^s \Leftrightarrow L_\omega(x) = \{0\}.$$

令 $h: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ 是 A 到 B 的拓扑等价，由 A 和 B 的双曲性知其只以 0 为奇点，故 $h(0) = 0$. 当 $\zeta \in E_A^s$ 时，有

$$L_\omega(h(\zeta)) = \{h(L_\omega(\zeta))\} = \{h(0)\} = \{0\},$$

故 $h(\zeta) \in E_B^s$，即

$$h(E_A^s) \subset E_B^s.$$

同理，有 $h^{-1}(E_B^s) \subset E_A^s$ 从而，$h|E_A^s: E_A^s \to E_B^s$ 是一一对应的，故

$$\dim E_A^s = \dim E_B^s,$$

即 A 和 B 有相同的指数. □

§8.3 Hartman 线性化定理

定义 8.3.1 设 U 是 Banach 空间$(E, \|\cdot\|)$中的开集，$a \in U$，映射 $f \in C^1(U, E)$以 a 为不动点，如果导算子 $A = Df(a)$是双曲线性映射，则称 a 为 f 的双曲不动点.

在下面的讨论中，不妨设 $a = 0 \in E$. 事实上，如果 $f(a) = a$，则令 $F(x) = f(x) - a$，于是 $x = 0$ 是 $F(x)$的不动点.

设$(E, \|\cdot; E\|)$和$(F, \|\cdot; F\|)$是 Banach 空间，记

$$C_b^0(E, F) = \{f \in C^0(E, F) \mid \sup_{x \in E} \|f(x); F\| < +\infty\}, \quad (8.3.1)$$

赋以范数

$$\| f \|_b = \sup_{x \in E} \| f(x); F \| \tag{8.3.2}$$

而成 Banach 空间. 不言而喻, $C_b^0(E) = C_b^0(E, E)$.

设 $A \in H(E)$. E 关于 A 不变的闭线性子空间的直和分解为

$$E = E^s \oplus E^u. \tag{8.3.3}$$

对任一 $x \in E$, 有

$$x = x_s + x_u, x_s \in E^s, x_u \in E^u.$$

按定理 8.1.1, 可设

$$\| A_s \| = \| A|E^s \| \leqslant \tau < 1, \quad \| A_u^{-1} \| = \| (A|E^u)^{-1} \| \leqslant \tau < 1, \tag{8.3.4}$$

该处取与 $\| \cdot ; E \|$ 等价的范数

$$\| x \| = \max\{ \| x_s \|, \| x_u \| \}, \tag{8.3.5}$$

记投影算子 $p_s \in L(E, E^s)$ 和 $p_u \in L(E, E^u)$ 有

$$p_s x = x_s, \quad p_u x = x_u, \tag{8.3.6}$$

于是, 相应于 E 分解式(8.3.3)有 $C_b^0(E)$ 的直和分解

$$C_b^0(E) = C_b^0(E, E^s) \oplus C_b^0(E, E^u),$$

对任一 $f \in C_b^0(E)$, 有 $f = f_s + f_u$, 使

$$f(x) = p_s f(x) + p_u f(x) = f_s(x) + f_u(x), \quad \forall x \in E, \tag{8.3.7}$$

其中记 $f_s = p_s \circ f$, $f_u = p_u \circ f$. 于是, 由(8.3.5)有

$$\begin{aligned} \| f \|_b &= \sup_{x \in E} \| f(x) \| \\ &= \sup_{x \in E} \max\{ \| f_s(x) \|, \| f_u(x) \| \} \\ &= \max\{ \| f_s \|_b, \| f_u \|_b \}. \end{aligned} \tag{8.3.8}$$

首先给出 Hartman 定理的范函分析证明, 即 Pugh 定理.

设(X, δ)和(Y, d)是距离空间, 称 $f: X \to Y$ 是 Lipschitz 映射, 如果存在 $\alpha > 0$ 使得

$$d(f(x'), f(x)) \leqslant \alpha \delta(x', x), \quad \forall x', x \in X,$$

则称使上式成立的最小非负实数 α 为 f 的 Lipschitz 常数, 记为 $\mathrm{Lip}(f)$.

引理 8.3.1 (Lipschitz 逆映射定理) 设$(E, \| \ \|)$是 Banach 空间, 映射 $A \in L(E, E)$ 和 ψ 分别是可逆和 Lipschitz 映射, 且

$$\mathrm{Lip}(\psi) < \| A^{-1} \|^{-1},$$

则 $g = A + \psi$ 和 g^{-1} 是可逆的 Lipschitz 映射, 且

$$\mathrm{Lip}(g^{-1}) \leqslant \frac{1}{\|A^{-1}\|^{-1} - \mathrm{Lip}(\psi)}.$$

证明　记 $\varphi = -A^{-1}\circ\psi$，对一固定的 $a \in E$，有

$$\|\varphi(x-a)\| \leqslant \|A^{-1}\|\,\mathrm{Lip}(\psi)\,\|x-a\|, \qquad \forall x \in E,$$

故

$$\|\varphi\| \leqslant \mathrm{Lip}(\psi)\,\|A^{-1}\| < 1.$$

由([10]，193 页)，知 $I-\varphi$ 可逆，其中 I 为文献[10]中的恒等算子，即

$$g^{-1} = (A+\psi)^{-1} = (I-\varphi)^{-1}\circ A^{-1}$$

存在，且

$$\mathrm{Lip}(g^{-1}) \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|\varphi\|} \leqslant \frac{1}{\|A^{-1}\|^{-1} - \mathrm{Lip}(\psi)}$$

成立.　□

定理 8.3.1 (Pugh 定理)　设 $A \in H(E)$，而 $\varphi, \psi \in C_b^0(E)$ 满足

$$\mathrm{Lip}(\varphi), \mathrm{Lip}(\psi) < \min\{1-\tau, \|A^{-1}\|^{-1}\}$$

则存在唯一的 $\eta \in C_b^0(E)$，使同胚 $h = id + \eta : E \to E$，满足

$$h\circ(A+\varphi) = (A+\psi)\circ h, \tag{8.3.9}$$

即 $A+\varphi$ 与 $A+\psi$ 拓扑共轭.

证明　如果存在唯一的 $\eta \in C_b^0(E)$ 使

$$(id+\eta)\circ(A+\varphi) = (A+\psi)\circ(id+\eta). \tag{8.3.10}$$

记 $h = id+\eta$，即有(8.3.9)成立. 这时，$h: E\to E$ 是同胚. 事实上，在(8.3.10)中交换 φ 和 ψ 的位置后，存在唯一的 $\xi \in C_b^0(E)$ 使

$$(id+\xi)\circ(A+\psi) = (A+\varphi)\circ(id+\xi).$$

联合(8.3.10)可得

$$(id+\xi)(id+\eta)(A+\varphi) = (A+\varphi)(id+\xi)(id+\eta)$$

或

$$(id+\zeta)(A+\varphi) = (A+\varphi)(id+\zeta), \tag{8.3.11}$$

其中

$$\zeta = \eta + \xi(id+\eta) \in C_b^0(E).$$

而在算子方程(8.3.11)中，由解 $\zeta = 0 \in C_b^0(E)$ 的唯一性，有

$$(id+\xi)(id+\eta) = id.$$

类似可证

$$(id+\eta)(id+\xi) = id,$$

从而 $h: E\to E$ 是同胚.

下证算子方程(8.3.10)在 $C_b^0(E)$ 中存在唯一解 η. 由(8.3.10)得

$$\eta \circ (A + \varphi) = A \circ \eta + \psi \circ (id + \eta) - \varphi.$$

投影到 E^s 和 E^u 上，并注意到 $A_s \circ \eta = A_s \circ \eta_s$，$A_u \circ \eta = A_u \circ \eta_u$ 有

$$\eta_s \circ (A + \varphi) = A_s \circ \eta_s + \psi_s \circ (id + \eta) - \varphi_s, \tag{8.3.12}$$

$$\eta_u \circ (A + \varphi) = A_u \circ \eta_u + \psi_u \circ (id + \eta) - \varphi_u. \tag{8.3.13}$$

由 $\mathrm{Lip}(\varphi) < \| A^{-1} \|^{-1}$，及引理 8.3.1 知 $(A + \varphi)^{-1}$ 存在且是 Lipschitz 映射.

在(8.3.12)中，定义 $F_s: C_b^0(E) \to C_b^0(E, E^s)$ 为

$$\begin{aligned} F_s(\eta) &= \eta_s \circ (A + \varphi) - A_s \circ \eta_s \\ &= (\eta_s - A_s \circ \eta_s \circ (A + \varphi)^{-1}) \circ (A + \varphi) \\ &= (id - G_s) \circ \eta_s \circ (A + \varphi), \end{aligned}$$

其中 $G_s: C_b^0(E, E^s) \to C_b^0(E, E^s)$ 满足

$$G_s \circ \eta_s = A_s \circ \eta_s \circ (A + \varphi)^{-1},$$

且是可逆线性算子，其逆算子为

$$G_s^{-1} \circ \xi_s = A_s^{-1} \circ \xi_s \circ (A + \varphi).$$

记

$$\Delta = \{ y \in E \mid y = (A + \varphi)^{-1}(x), \forall x \in E \},$$

又取 τ 如(8.3.4)，有

$$\begin{aligned} \| G_s \circ \eta_s \|_b &= \| A_s \circ \eta_s \circ (A + \varphi)^{-1} \|_b \\ &\leqslant \tau \sup_{x \in E} \| \eta_s((A + \varphi)^{-1}(x)); E \| \\ &= \tau \sup_{y \in \Delta} \| \eta_s(y); E \| \\ &\leqslant \tau \| \eta_s \|_b. \end{aligned}$$

从而 $\| G_s \| \leqslant \tau < 1$，故 $id - G_s$ 可逆，且

$$\| (id - G_s)^{-1} \| \leqslant (1 - \tau)^{-1}.$$

于是，线性算子 F_s 有线性逆算子，

$$F_s^{-1}(\xi) = (id - G_s)^{-1} \circ \xi \circ (A + \varphi)^{-1},$$

且

$$\| F_s^{-1} \| \leqslant (1 - \tau)^{-1}.$$

利用 F_s 将(8.3.12)改写为

$$\eta_s = \mathcal{T}_s(\eta), \tag{8.3.14}$$

其中 $\mathcal{T}_s: C_b^0(E) \to C_b^0(E, E^s)$ 为

$$\mathcal{T}_s(\eta) = F_s^{-1} \circ (\psi_s \circ (id + \eta) - \varphi_s).$$

于是

$$\|\mathscr{T}_s(\eta)-\mathscr{T}_s(\zeta)\|_b\leqslant\frac{1}{1-\tau}\mathrm{Lip}(\psi)\|\eta-\zeta\|_b,\quad\forall\,\eta,\zeta\in C_b^0(E).\tag{8.3.15}$$

又在(8.3.13)中定义 $F_u:C_b^0(E)\to C_b^0(E,E^u)$为

$$\begin{aligned}F_u(\eta)&=A_u\circ\eta_u-\eta_u\circ(A+\varphi)\\&=A_u\circ(\eta_u-A_u^{-1}\circ\eta_u\circ(A+\varphi))\\&=A_u\circ(id-G_u)\circ\eta_u,\end{aligned}$$

其中 $G_u:C_b^0(E,E^u)\to C_b^0(E,E^u)$为

$$G_u\circ\eta_u=A_u^{-1}\circ\eta_u\circ(A+\varphi).$$

注意到 $\|A_u^{-1}\|\leqslant\tau<1$,可证 $\|G_u\|\leqslant\tau$;类似前证,线性算子 F_u^{-1} 存在且

$$\|F_u^{-1}\|\leqslant\frac{\tau}{1-\tau}.$$

利用 F_u 将(8.3.13)改写为

$$\eta_u=\mathscr{T}_u(\eta),\tag{8.3.16}$$

其中 $\mathscr{T}_u:C_b^0(E)\to C_b^0(E,E^u)$为

$$\mathscr{T}_u(\eta)=-F_u^{-1}\circ(\psi_u\circ(id+\eta)-\varphi_u).$$

于是

$$\|\mathscr{T}_u(\eta)-\mathscr{T}_u(\zeta)\|_b\leqslant\frac{\tau}{1-\tau}\mathrm{Lip}(\psi)\|\eta-\zeta\|_b,\quad\forall\,\eta,\zeta\in C_b^0(E).\tag{8.3.17}$$

定义 $\mathscr{T}:C_b^0(E)\to C_b^0(E)$为

$$\mathscr{T}(\eta)=\mathscr{T}_s(\eta)+\mathscr{T}_u(\eta).$$

对任意 $\eta,\zeta\in C_b^0(E)$,利用(8.3.15)和(8.3.17)有

$$\begin{aligned}\|\mathscr{T}(\eta)-\mathscr{T}(\zeta)\|_b&=\sup_{x\in E}\|\mathscr{T}(\eta)(x)-\mathscr{T}(\zeta)(x);E\|\\&=\sup_{x\in E}\|\mathscr{T}_s(\eta)(x)-\mathscr{T}_s(\zeta)(x)+\mathscr{T}_u(\eta)(x)-\mathscr{T}_u(\zeta)(x);E\|\\&=\sup_{x\in E}\max\{\|\mathscr{T}_s(\eta)(x)-\mathscr{T}_s(\zeta)(x);E\|,\|\mathscr{T}_u(\eta)(x)\\&\quad-\mathscr{T}_u(\zeta)(x);E\|\}\\&=\max\{\|\mathscr{T}_s(\eta)-\mathscr{T}_s(\zeta)\|_b,\|\mathscr{T}_u(\eta)-\mathscr{T}_u(\zeta)\|_b\}\\&\leqslant\frac{1}{1-\tau}\mathrm{Lip}(\psi)\|\eta-\zeta\|_b.\end{aligned}$$

而 $(1-\tau)^{-1}\mathrm{Lip}(\psi)<1$,故 $\mathscr{T}:C_b^0(E)\to C_b^0(E)$是压缩映射,在 $C_b^0(E)$中存在唯一不动点 $\eta\in C_b^0(E)$使

$$\eta=\mathscr{T}_s(\eta)+\mathscr{T}_u(\eta)$$

或

$$\eta_s = \mathcal{T}_s(\eta), \eta_u = \mathcal{T}_u(\eta),$$

即算子方程(8.3.10)在 $C_b^0(E)$ 中有唯一解. □

推论 8.3.1 设 $A \in H(E)$, 则存在 $\varepsilon > 0$, 当 $B \in L(E,E)$ 且 $\|B - A\| < \varepsilon$ 时, B 与 A 在 0 点邻近局部拓扑共轭.

证明 取 $\varepsilon \in \mathbf{R}$ 满足条件

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\min\{1 - \tau, \|A^{-1}\|^{-1}\}.$$

对于 $B \in O_\varepsilon(A) = \{B \in L(E,E) \mid \|B - A\| < \varepsilon\}$, 令

$$\varphi(x) = \begin{cases} (B - A)(x), & \|x\| \leqslant 1, \\ (B - A)\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right), & \|x\| \geqslant 1, \end{cases}$$

容易核验 $\varphi \in C_b^0(E)$, 且

$$\mathrm{Lip}(\varphi) \leqslant 2\|B - A\| < 2\varepsilon < \min\{1 - \tau, \|A^{-1}\|^{-1}\}$$

对于 $\psi = 0$ 的情况, 应用定理 8.3.1, 可知 $A + \varphi$ 与 A 拓扑共轭, 限制在 $O_1(0) = \{x \in E \mid \|x\| < 1\}$ 上时, 有 $(A + \varphi)|_{O_1(0)} = B$, 故在 0 点邻近有 A 与 B 局部拓扑共轭. □

下面将给出利用 Pugh 定理证明的 Hartman 线性化定理.

不妨设 $f \in C^1(U,E)$ 的双曲不动点是 $0 \in E$, 即 $f(0) = 0$ 且 $A = Df(0) \in H(E)$.

引理 8.3.2 设 E 是 Banach 空间, U 是 E 中含零点 0 的开集. $f \in C^1(U,E)$ 以 0 为不动点, 记 $A = Df(0)$, 则对任给 $\varepsilon > 0$, 存在零点 0 的开邻域 $V \subset U$ 和 $\varphi \in C_b^0(E)$ 使得 $\mathrm{Lip}(\varphi) < \varepsilon$, 且 $f = A + \varphi$ 在 $\overline{V}$ 上成立.

证明 取函数 $\alpha \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, 满足条件

1° 当 $|t| \geqslant 1$ 时, $\alpha(t) = 0$; 当 $|t| \leqslant \frac{1}{2}$ 时, $\alpha(t) = 1$.

2° $|\alpha'(t)| < k$ (常数 $k > 2$), $\forall t \in \mathbf{R}$.

从而 $|\alpha(t)| \leqslant k$, $\forall t \in \mathbf{R}$. 又设

$$f = Df(0) + \psi = A + \psi,$$

故 $\psi(0) = 0$, 且 $D\psi(0) = 0$. 任给 $\varepsilon > 0$, 取 $r > 0$ 作

$$B_r = \{x \in E \mid \|x; E\| \leqslant r\} \subset U,$$

使

$$\|D\psi(x)\| < \varepsilon/2k.$$

定义映射 $\varphi: E \to E$ 为

$$\varphi(x) = \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right)\psi(x), \quad \forall x \in E.$$

取 $V = B_{r/2}$，于是在 $\overline{V}$ 上有 $\alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right) = 1$，$\forall x \in \overline{V}$，即

$$f = A + \varphi$$

在 $\overline{V}$ 上成立. 下证 $\mathrm{Lip}(\varphi) < \varepsilon$. 对任给的 $x, x' \in E$，分三种情况进行讨论.

情况 1° 若 $x, x' \in B_r$，则

$$\begin{aligned}
&\|\varphi(x) - \varphi(x')\| \\
&= \left\|\alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right)\psi(x) - \alpha\left(\frac{\|x'\|}{r}\right)\psi(x')\right\| \\
&\leqslant \left\|\left[\alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right) - \alpha\left(\frac{\|x'\|}{r}\right)\right](\psi(x) - \psi(0))\right\| \\
&\quad + \left\|\alpha\left(\frac{\|x'\|}{r}\right)(\psi(x) - \psi(x'))\right\| \\
&\leqslant k\,\frac{\|x - x'\|}{r} \cdot \frac{\varepsilon}{2k}\|x\| + k \cdot \frac{\varepsilon}{2k}\|x - x'\| \\
&\leqslant \varepsilon\|x - x'\|.
\end{aligned}$$

情况 2° 若 $x \in B_r$，而 $x' \overline{\in} B_r$，则存在 $y \in E$，$\|y\| = r$，使 $\|x - y\| \leqslant \|x - x'\|$，且由 $\varphi(x') = \varphi(y) = 0$，利用已证情况 1°的结论，有

$$\begin{aligned}
&\|\varphi(x) - \varphi(x')\| \\
&= \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leqslant \varepsilon\|x - y\| \leqslant \varepsilon\|x - x'\|.
\end{aligned}$$

情况 3° 若 $x, x' \overline{\in} B_r$ 则

$$\|\varphi(x) - \varphi(x')\| = 0 < \varepsilon\|x - x'\|.$$

综合上述有 $\mathrm{Lip}(\varphi) < \varepsilon$ 成立. □

定理 8.3.2 (Hartman 线性化定理) 设$(E, \|\cdot\|)$是 Banach 空间，$U \subset E$ 是含零点 0 的开集且 0 是 $f \in C^1(U, E)$的双曲不动点，记 $A = Df(0)$，则存在 0 的开邻域 V 和同胚映射 $h: E \to E$ 使

$$h \circ f|V = A \circ h|V$$

成立，即 f 与 A 在 0 点邻域 V 内局部拓扑共轭.

证明 由于 $A = Df(0) \in H(E)$，使(8.3.3)，(8.3.4)和(8.3.5)成立. 取 $\varepsilon \in \mathbf{R}$ 满足

$$0 < \varepsilon < \min\{1 - \tau, \|A^{-1}\|^{-1}\},$$

及引理 8.3.2 中的 φ. 利用定理 8.3.1，存在同胚 $h = id + \eta: E \to E$，使

$$h \circ (A + \varphi) = A \circ h$$

限制在引理 8.3.2 中给出 V 上，有结论成立. □

§8.4 双曲不动点的局部稳定性

为了讨论双曲不动点在 C^1 类小扰动下的不变性质，首先给出隐函数存在定理[106].

设 Λ, X 和 Y 是 Banch 空间，映射 $f\in C^1(\Lambda\times X, Y)$使方程

$$f(\lambda, x) = 0, \tag{8.4.1}$$

当 $\lambda=\lambda_0\in\Lambda$ 时，有解 $x=x_0\in X$，即

$$f(\lambda_0, x_0) = 0. \tag{8.4.2}$$

引理 8.4.1 设开集 $U\subset\Lambda\times X$, $(\lambda_0, x_0)\in U$，映射 $f: U\to Y$ 连续，导算子 $D_xf(\lambda, x)$存在且在(λ_0, x_0)点连续，$D_xf(\lambda_0, x_0): X\to Y$ 存在有界逆，则存在 $r, \delta>0$，使得 $\|\lambda-\lambda_0\|<\delta$ 时，方程(8.4.1)，(8.4.2)在 $\|x-x_0\|<r$ 内存在唯一连续解.

证明 设 $M>0$ 使

$$\|(D_xf(\lambda_0, x_0))^{-1}\|\leqslant M. \tag{8.4.3}$$

由 $D_xf(\lambda, x)$在(λ_0, x_0)点的连续性. 存在 $r, \delta>0$，当

$$\lambda\in O_\delta(\lambda_0)=\{\lambda\in\Lambda\mid\|\lambda-\lambda_0\|<\delta\},$$
$$x\in O_r(x_0)=\{x\in X\mid\|x-x_0\|<r\}$$

时，有

$$\|D_xf(\lambda, x)-D_xf(\lambda_0, x_0)\|<\frac{1}{2M}, \tag{8.4.4}$$

且由 $f(\lambda, x_0)$的连续性，可要求 $\lambda\in O_\delta(\lambda_0)$时，有

$$\|f(\lambda, x_0)\|<\frac{r}{2M}. \tag{8.4.5}$$

对任给的 $\lambda\in O_\delta(\lambda_0)$，定义映射 $\varphi:\overline{O_r(x_0)}\to X$ 为

$$\varphi(\lambda, x)=x-[D_xf(\lambda_0, x_0)]^{-1}f(\lambda, x),$$

其中$\overline{O_r(x_0)}=\{x\in X\mid\|x-x_0\|\leqslant r\}$是 Banach 空间 X 中的闭集. 下证 $\varphi(\lambda, x)$在$\overline{O_r(x_0)}$内存在唯一的不动点 $x=x(\lambda)$，即是(8.4.1)的唯一解.

首先，当 $\|x-x_0\|\leqslant r$ 时，由(8.4.3)和(8.4.4)有

$$\begin{aligned}&\|D_x\varphi(\lambda, x)\|\\ =&\|id-[D_xf(\lambda_0, x_0)]^{-1}\cdot D_xf(\lambda, x)\|\\ \leqslant&\|[D_xf(\lambda_0, x_0)]^{-1}\|\cdot\|D_xf(\lambda_0, x_0)-D_xf(\lambda, x)\|\\ <&\frac{1}{2},\end{aligned}$$

即 φ 在$\overline{O_r(x_0)}$内压缩.其次,由(8.4.5)及上式又有

$$\|\varphi(\lambda,x_0)-x_0\|\leqslant\|(D_xf(\lambda_0,x_0))^{-1}\|\cdot\|f(\lambda,x_0)\|<\frac{r}{2},$$

$$\|\varphi(\lambda,x)-\varphi(\lambda,x_0)\|\leqslant\sup_{\|x-x_0\|\leqslant r}\|D_x\varphi(\lambda,x)\|\cdot\|x-x_0\|<\frac{r}{2},$$

从而,当 $\|x-x_0\|\leqslant r$ 时

$$\begin{aligned}&\|\varphi(\lambda,x)-x_0\|\\ \leqslant&\|\varphi(\lambda,x)-\varphi(\lambda,x_0)\|+\|\varphi(\lambda,x_0)-x_0\|<r,\end{aligned}$$

即 $\varphi:\overline{O_r(x_0)}\to O_r(x_0)$.

据压缩映射原理,对任一 $\lambda\in O_\delta(\lambda_0)$, φ 在$\overline{O_r(x_0)}$内存在唯一不动点 $x=x(\lambda)\in O_r(x_0)$且 $x_0=x(\lambda_0)$.

最后,证 $x=x(\lambda)$ 在 $\|\lambda-\lambda_0\|<\delta$ 内连续.事实上,任取 $\lambda_1,\lambda_2\in O_\delta(\lambda_0)$,记 $x_1=x(\lambda_1)$, $x_2=x(\lambda_2)$ 有 $x_1,x_2\in O_r(x_0)$,于是

$$\begin{aligned}\|x_1-x_2\|&=\|\varphi(\lambda_1,x_1)-\varphi(\lambda_2,x_2)\|\\&\leqslant\|\varphi(\lambda_1,x_1)-\varphi(\lambda_1,x_2)\|+\|\varphi(\lambda_1,x_2)-\varphi(\lambda_2,x_2)\|\\&\leqslant\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|+\|\varphi(\lambda_1,x_2)-\varphi(\lambda_2,x_2)\|,\end{aligned}$$

故

$$\|x(\lambda_1)-x(\lambda_2)\|=\|x_1-x_2\|\leqslant2\|\varphi(\lambda_1,x_2)-\varphi(\lambda_2,x_2)\|,$$

由 φ 关于 λ 的连续性,从而 $x=x(\lambda)$ 在 $O_\delta(\lambda_0)$内连续. □

设 U 是 Banach 空间$(E,\|\cdot;E\|)$中的开集,$0\in U$,对于正数 $\delta>0$ 记

$$O_\delta(0)=\{x\in E\mid\|x\|<\delta\},$$

又设 $f\in C^1(U,E)$,令 $F=id-f$,对于正数 $\varepsilon>0$,记,

$$O_\varepsilon(f)=\{g\in C^1(U,E)\mid\|g-f;C^1\|<\varepsilon\},$$

$$O_\varepsilon(F)=\{G\in C^1(U,E)\mid\|G-F,C^1\|<\varepsilon\}.$$

定理 8.4.1　在上述记号下,若 $0\in U$ 是 $f\in C^1(U,E)$的双曲不动点,则存在 $\varepsilon,\delta>0$,使得任意 $g\in O_\varepsilon(f)$在 $O_\delta(0)$中存在唯一不动点 $c\in O_\delta(0)\subset U$,并且 c 是 g 的双曲不动点.

证明　设 $A=Df(0)\in H(E)$.由命题 8.1.1 结论(3),

$$DF(0)=id-Df(0)=id-A,$$

存在有界逆,又设 $g\in O_\varepsilon(f)$,记 $G=id-g$ 则

$$\|G-F;C^1\|=\|g-f;C^1\|<\varepsilon,$$

即 $G\in O_\varepsilon(F)$.

记 $\Lambda = C^1(U,E)$, $\lambda_0 = F \in \Lambda$, $x_0 = 0 \in E$, 取 $\Lambda \times E$ 中的开集 W, 使 $(\lambda_0, x_0) \in W$. 定义 $\varphi: W \to E$ 为

$$\varphi(\lambda, x) = \lambda(x), \quad \forall (\lambda, x) \in W,$$

是连续映射. 显然

$$D_x\varphi(\lambda, x) = D_x\lambda(x)$$

存在并在(λ_0, x_0)点连续, 且

$$D_x\varphi(\lambda, x)|_{(\lambda_0, x_0)} = DF(0) = id - A$$

存在有界逆. 于是, 由引理 8.4.1, 存在 $\varepsilon, \delta > 0$, 对任一 $g \in O_\varepsilon(f)$, 即 $G = id - g \in O_\varepsilon(F)$, 存在唯一的 $c \in O_\delta(0) \subset U$ 使

$$\varphi(G, c) = 0,$$

即

$$g(c) = c.$$

下证 g 的不动点 c 是双曲不动点. 由定理 8.1.4, $H(E)$是 $L(E,E)$中的开集. 由所设 $A = Df(0) \in H(E)$, 存在 $\eta > 0$, 当 $B \in O_{2\eta}(A) = \{B \in L(E,E) \mid \|B - A\| < 2\eta\}$时 $B \in H(E)$. 同时, 要求上述 $\varepsilon, \delta > 0$ 还满足条件:

(1)由 $Df(x)$在 $x = 0$ 点的连续性, 当 $x \in O_\delta(0)$时, 有

$$\|Df(x) - Df(0)\| = \|Df(x) - A\| < \eta.$$

(2)$\varepsilon < \eta$, 于是当 $g \in O_\varepsilon(f)$, 有

$$\|Dg(x) - Df(x); E\| \leqslant \|g - f; C^1\| < \varepsilon < \eta.$$

从而, 当 $c \in O_\delta(0)$时有

$$\|Dg(c) - A\| \leqslant \|Dg(c) - Df(c)\| + \|Df(c) - A\| < 2\eta,$$

即 $Dg(c) \in O_{2\eta}(A)$, 故 $Dg(c) \in H(E)$, c 是g 的双曲不动点. □

利用 Hartman 线性化定理, 可以得到双曲不动点的局部结构稳定性.

设 U 是 Banach 空间 E 的开集, 映射 $f \in C^1(U,E)$的双曲不动点是 $0 \in U$. 称 f 在 0 点邻近是局部结构稳定的, 如果存在 $\varepsilon, \delta > 0$ 对任一 $g \in O_\varepsilon(f)$, 在 $O_\varepsilon(0)$中有唯一双曲不动点 c, 使得 f 和 g 各限制在 0 点邻近和 c 点邻近时是拓扑共轭的. 这时, 简记为

$$f \overset{\text{loc}}{\sim} g.$$

定理 8.4.2 设$(E, \|\cdot; E\|)$是 Banach 空间, U 是E 中的开集, $0 \in U$ 是$f \in C^1(U,E)$的双曲不动点, 则存在 0 点的邻域 $U' \subset U$, 使得 f 限制在U'上是局部结构稳定的.

证明 由定理 8.4.1, 存在 $\varepsilon, \delta > 0$, 使得任一 $g \in O_\varepsilon(f)$在 $O_\delta(0) \subset U$ 中具有唯一的双曲不动点 c. 取 $0 < \eta < \delta$ 使得在E 中有

$$O_\eta(c) = \{x \in E \mid \| x - c; E \| < \eta\} \subset O_\delta(0) \subset U,$$

记

$$\tilde{g}(x) = g(x + c) - c,$$

显然

$$\tilde{g}(0) = 0, \text{且 } B = Dg(c) = D\tilde{g}(0) \in H(E),$$

即 0 是 $\tilde{g}$ 的双曲不动点.按下式定义平移 $\tau: E \to E$,有

$$\tau(x) = x + c$$

是同胚,显然

$$\tau(0) = c,$$
$$\tau: O_\eta(0) \to O_\eta(c),$$
$$\tau: \tilde{g}(O_\eta(0)) \to g(O_\eta(c)),$$

且在 $O_\eta(0)$上有

$$\tilde{g} = \tau^{-1} \circ g \circ \tau,$$

即 $\tilde{g}$ 在$O_\eta(0)$内与 g 是局部拓扑共轭的,由拓扑共轭的等价传递性质,只需证在 $O_\eta(0)$内 $\tilde{g}$ 与f 是拓扑共轭的.

记 $A = Df(0) \in H(E)$,由定理 8.3.2(Hartman 线性化定理),取上述 η 同时还满足,在 $O_\eta(0)$内有

$$f \overset{\text{loc}}{\sim} A, \quad B \overset{\text{loc}}{\sim} \tilde{g}$$

成立.

另一方面,由推论 8.3.1,存在 $\gamma > 0$ 使

$$B \in \{B \in L(E, E) \mid \| B - A \| < \gamma\} \Rightarrow A \overset{\text{loc}}{\sim} B,$$

因此,可取上述 $\varepsilon > 0$ 足够小,同时满足

$$\begin{aligned} \| A - B \| &= \| Df(0) - Dg(c) \| \\ &\leqslant \| Df(0) - Df(c) \| + \| Df(c) - Dg(c) \| \\ &< \gamma, \end{aligned}$$

从而

$$A \overset{\text{loc}}{\sim} B$$

成立.联合上述诸式,使得对恰当选取的 $\eta > 0$ 有

$$f \overset{\text{loc}}{\sim} A \overset{\text{loc}}{\sim} B \overset{\text{loc}}{\sim} \tilde{g} \overset{\text{loc}}{\sim} g$$

成立.即存在 $U' = O_\eta(0)$,使得 f 限制在U'上是局部结构稳定的. □

§8.5 双曲不动点的稳定流形定理

设 U 是 Banach 空间$(E, \|\cdot;E\|)$中的开集,$0\in U$;$f\in C^1(U,E)$是从 U 到$f(U)$的微分同胚,且 0 是 f 的双曲不动点,记 $A=Df(0)\in H(E)$.

E 关于A 不变的闭线性子空间的直和分解如(8.3.3),也记为

$$E = E^s \times E^u,$$

这时,对任一 $x\in E$,有

$$x = (x_s, x_u), x_s \in E^s, x_u \in E^u.$$

必要时,按(8.3.5)取 E 的等价范数,按定理 8.1.1,可要求(8.3.4)成立.对正数 $\alpha>0$,记

$$B_\alpha = \{x \in E \mid \|x\| \leqslant \alpha\} = B_\alpha^s \times B_\alpha^u,$$

其中

$$B_\alpha^s = B_\alpha \cap E^s, B_\alpha^u = B_\alpha \cap E^u.$$

定义 8.5.1 设$f:E\to E$微分同胚,$f(0)=0$,则f在0点的稳定流形 $W^s(0,f)$和不稳定流形 $W^u(0,f)$分别定义为

$$W^s(0,f) = \{x \in E \mid \lim_{k\to+\infty} f^k(x) = 0\}$$

和

$$W^u(0,f) = \{x \in E \mid \lim_{k\to+\infty} f^{-k}(x) = 0\}.$$

定义 8.5.2 设 $U\subset E$ 是 0 的邻域,$f:U\to f(U)$微分同胚,$f(0)=0$,则 f 在 0 点对邻域 U 的局部稳定流形 $W_U^s(0,f)$和局部不稳定流形 $W_U^u(0,f)$分别定义为

$$W_U^s(0,f) = \{x \in E \mid f^k(x) \in U, \forall k \geqslant 0\}$$

和

$$W_U^u(0,f) = \{x \in E \mid f^{-k}(x) \in U, \forall k \geqslant 0\}.$$

在上述记号中,当不需要明确指明0点或f时,也简记 $W_U^s(0,f)$为 $W_U^s(0)$或 W_U^s,其他类似.

例 8.5.1 设 $A:E\to E$ 是线性自同构,$A\in H(E)$,则 $x\in E^s$ 时,有

$$A^k x \to 0, \text{当 } k \to +\infty;$$

$x\in E^u$ 时,有

$$A^{-k}x \to 0, \text{当 } k \to +\infty$$

而对于其他 $y\in E\setminus(E^s\cup E^u)$,$y\neq 0$,有

$$\|A^k y\| \to \infty, \quad \text{当 } k \to +\infty \text{ 或 } -\infty \text{ 时},$$

故

$$W^s(0, A) = E^s, \qquad W^u(0, A) = E^u.$$

例 8.5.2　设 $f \in C^1(U, E)$，$0 \in U$ 是 f 的双曲不动点. 根据 Hartman 定理，在 B_α 中可取 $\alpha > 0$ 足够小，使 E 上同胚 $h: h^{-1}(B_\alpha) \to B_\alpha$ 有

$$h \circ f | V = A \circ h | V,$$

其中 $V = h^{-1}(B_\alpha)$，$A = Df(0)$. 由

$$W^s_{B_\alpha}(0, A) = B_\alpha \cap E^s = B^s_\alpha,$$

$$W^u_{B_\alpha}(0, A) = B_\alpha \cap E^u = B^u_\alpha,$$

有

$$W^s_V(0, f) = h^{-1}(B^s_\alpha),$$

$$W^u_V(0, f) = h^{-1}(B^u_\alpha).$$

命题 8.5.1　设 W^s_U 和 W^u_U 分别是微分同胚 f 在双曲不动点 0 处的稳定流形和不稳定流形，则对足够小的 U，有

$$W^s_U = \{x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(U) \mid f^k(x) \to 0, \text{当 } k \to +\infty\},$$

$$W^u_U = \{x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{k}(U) \mid f^{-k}(x) \to 0, \text{当 } k \to +\infty\},$$

从而

$$W^s_U \subset W^s(0, f), \qquad W^u_U \subset W^u(0, f).$$

证明　仅证第一式，记其右端为 W_1，显然 $W^s_U \supset W_1$，下证

$$W^s_U \subset W_1.$$

对任一 $x \in W^s_U$，有 $f^k(x) \in U$，$\forall k \geqslant 0$，即

$$x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(U). \tag{8.5.1}$$

同时，由 Hartman 定理，对足够小的 U，存在同胚 $h: U \to V = h(U)$，使 $A = Df(0)$ 有

$$h \circ f^k = A^k \circ h, \quad \forall k \geqslant 0,$$

在 U 上成立. 由 $f^k(x) \in U$，$\forall k \geqslant 0$，有

$$A^k(h(x)) = h(f^k(x)) \in h(U) = V, \quad \forall k \geqslant 0.$$

从而 $h(x) \in W^s_V(0, A) = V \cap E^s$（见例 8.5.2），于是

$$A^k(h(x)) \to 0, \quad k \to +\infty.$$

由于 h 是同胚，且 $h(0) = 0$，故

$$f^k(x) = h^{-1} \circ A^k \circ h(x) \to 0, \quad k \to +\infty.$$

联合(8.5.1)有 $x \in W_1$，即 $W^s_U \subset W_1$，从而结论成立.　□

命题 8.5.2 设 U 是 Banach 空间 E 中含 0 点的开集,0 是 $f\in C^1(U,E)$的双曲不动点,$f:U\to f(U)$是微分同胚,则存在 $b>0$ 及同胚 $h:E\to E$ 使

$$W_V^s(0,f)=h^{-1}(B_b^s),\quad W_V^u(0,f)=h^{-1}(B_b^u),$$

其中 $V=h^{-1}(B_b)\subset U$.

证明 记 $A=Df(0)\in H(E)$,按 Hartman 定理,存在 $b>0$ 及同胚映射 $h:E\to E$ 使$h(0)=0$,且在 $V=h^{-1}(B_b)\subset U$ 上,有

$$h\circ f|V=A\circ h|V.$$

对任一 $x\in W_V^s(0,f)$,有

$$f^k(x)\in V=h^{-1}(B_b),\quad \forall k\geqslant 0$$

或

$$A^k\circ h(x)=h\circ f^k(x)\in B_b,\quad \forall k\geqslant 0,$$

即 $h(x)\in B_b^s=B_b\cap E^s$,从而 $x\in h^{-1}(B_b^s)$,故

$$W_V^s(0,f)\subset h^{-1}(B_b^s). \tag{8.5.2}$$

反之,对任一 $x\in h^{-1}(B_b^s)$,即 $h(x)\in B_b^s=W_{B_b}^s(0,A)$,从而

$$f^k(x)=h^{-1}\circ A^k\circ h(x)\to 0,\quad k\to+\infty,$$

且

$$f^k(x)\in h^{-1}(B_b)=V,\quad \forall k\geqslant 0.$$

故 $x\in W_V^s(0,f)$,即

$$W_V^s(0,f)\supset h^{-1}(B_b^s).$$

联合(8.5.2),有

$$W_V^s(0,f)=h^{-1}(B_b^s)$$

成立;类似可证后一结论. □

命题 8.5.3 设 $\beta>0$, $f=A+\psi:B_\beta\to E$,满足

$$\mathrm{Lip}(\psi)<\varepsilon<\min\left\{1-\tau,\frac{1}{2}(\tau^{-1}-1)\right\},$$

其中 $A=Df(0)\in H(E)$满足(8.3.4),如果 $x',x\in B_\beta$ 使

$$\|x'_u-x_u\|\geqslant\|x'_s-x_s\|,\quad x'=x'_s+x'_u,\quad x=x_s+x_u$$

则

$$\|f_u(x')-f_u(x)\|\geqslant(\tau^{-1}-\varepsilon)\|x'_u-x_u\|,$$

$$\|f_u(x')-f_u(x)\|\geqslant\|f_s(x')-f_s(x)\|.$$

证明 首先,证结论第一式.事实上,由

$$\|x'-x\|=\max\{\|x'_s-x_s\|,\|x'_u-x_u\|\}=\|x'_u-x_u\|$$

及

$$\| x'_u - x_u \| = \| A_u^{-1} \circ A_u(x'_u - x_u) \| \leqslant \tau \| A_u(x'_u - x_u) \|,$$

有

$$\begin{aligned} \| f_u(x') - f_u(x) \| &\geqslant \| A_u(x'_u - x_u) \| - \| \psi_u(x') - \psi_u(x) \| \\ &\geqslant \tau^{-1} \| x'_u - x_u \| - \varepsilon \| x' - x \| \\ &= (\tau^{-1} - \varepsilon) \| x'_u - x_u \| \end{aligned}$$

成立. 下证结论第二式. 事实上, 由结论第一式, 有

$$\begin{aligned} \| f_s(x') - f_s(x) \| &\leqslant \| A_s(x'_s - x_s) \| + \| \psi_s(x') - \psi_s(x) \| \\ &\leqslant (\tau + \varepsilon) \| x' - x \| \\ &= (\tau + \varepsilon) \| x'_u - x_u \| \\ &\leqslant \frac{\tau + \varepsilon}{\tau^{-1} - \varepsilon} \| f_u(x') - f_u(x) \|. \end{aligned}$$

注意到 $\tau + \varepsilon < 1 < \tau^{-1} - \varepsilon$ 有结论第二式成立. □

下面讨论局部稳定流形. 将前设 $f \in C^1(U, E)$ 表示为 $f = A + \psi$, $A = Df(0) \in E$, 从而 ψ 是 C^1 类映射, 且

$$\psi(0) = 0, \quad D\psi(0) = 0.$$

由于 $D\psi$ 的连续性, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\beta > 0$, 使在紧集 B_β 内 $D\psi(x)$ 一致连续, 即

$$\| D\psi(x) - D\psi(y) \| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in B_\beta.$$

特别有

$$\| D\psi(x) \| < \varepsilon, \quad \forall x \in B_\beta,$$

从而在 B_β 内, ψ 是 Lipschitz 映射, 且

$$\mathrm{Lip}(\psi) < \varepsilon.$$

在后面的讨论中, 特别取 $\beta > 0$ 使

$$\mathrm{Lip}(\psi) < \varepsilon < \min\{1 - \tau, \frac{1}{2}(\tau^{-1} - 1)\}. \tag{8.5.3}$$

设集合 $S \subset E$, 记

$$\mathscr{S}(S) = \{r = \{r_n\}_{n \geqslant 0} \subset S \mid r_n \to 0, \text{当 } n \to \infty\}. \tag{8.5.4}$$

当 $S = E$ 时, 在 $\mathscr{S}(E)$ 中可以依逐项运算定义加法和数乘, 并赋以范数

$$\| r \| = \sup_k \| r_n; E \| < +\infty$$

而成为 Banach 空间, $B_\beta \subset E$ 是 E 中的闭子集, 故 $\mathscr{S}(B_\beta)$ 是 $\mathscr{S}(E)$ 中的闭子集, 因而是完备子集.

简记 f 在 0 点对邻域 B_β 的局部稳定流形为 $W^s_\beta(0, f)$, 由命题 8.5.1, 有

$$x \in W_\beta^s(0,f) \Leftrightarrow r = \{r_n = f^n(x)\} \in \mathscr{S}(B_\beta). \tag{8.5.5}$$

对于 $r=\{r_n=f^n(x)\}\in\mathscr{S}(B_\beta)$定义投影

$$\rho: r \mapsto r_0 = x, \tag{8.5.6}$$

有 $x\in W_\beta^s(0,f)$. 显然 ρ 是线性映射.

如果,$\mathscr{S}(B_\beta)$有 $r=\{r_n=f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$,即

$$r_{n+1} = (A+\psi)f^n(x) = Ar_n + \psi(r_n),$$

将其分别投影到 E^s 和 E^u 上,记

$$r_n = (r_{n,s}, r_{n,u}), \qquad r_{n,s} \in E^s, r_{n,u} \in E^u,$$

$$\psi(r_n) = (\psi_s(r_n), \psi_u(r_n)), \psi_s(r_n) \in E^s, \psi_u(r_n) \in E^u.$$

得

$$r_{n,s} = A_s r_{n-1,s} + \psi_s(r_{n-1}), \qquad r_0 = x, n = 1,2,\cdots \tag{8.5.7}$$

$$r_{n,u} = A_u^{-1} r_{n+1,u} - A_u^{-1}\psi_u(r_n), \qquad n = 0,1,\cdots \tag{8.5.8}$$

由(8.5.7)得

$$r_{n,s} = (A_s)^n x_s + \sum_{j=0}^{n-1}(A_s)^{n-1-j}\psi_s(r_j), \quad n = 1,2,\cdots \tag{8.5.9}$$

其中 $r_{0,s}=x_s$. 由(8.5.8)得

$$r_{n,u} = (A_u)^{-m} r_{n+m,u} - \sum_{j=n}^{n+m-1}(A_u)^{-j-1+n}\psi_u(r_j),$$

其中 $m\geqslant 1$, 令 $m\to+\infty$有

$$r_{n,u} = -\sum_{j=n}^{\infty}(A_u)^{-j-1+n}\psi_u(r_j), \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{8.5.10}$$

对于任给的 $r=\{r_n\}_{n=0}^{\infty}\in\mathscr{S}(B_\beta)$, 分别记形如(8.5.9)和(8.5.10)的右端式为 $\overline{r}_{n,s}$和$\overline{r}_{n,u}$. 于是定义映射 $F_n: B_\beta^s\times\mathscr{S}(B_\beta)\to E$ 为

$$F_n(x_s, r) = (\overline{r}_{n,s}, \overline{r}_{n,u}), \forall x_s \in B_\beta^s, r \in \mathscr{S}(B_\beta), \quad n = 0,1,\cdots \tag{8.5.11}$$

引理 8.5.1 记$F(x_s,r)=\{F_n(x_s,r)\}_{n=0}^{\infty}$, 则$F: B_\beta^s\times\mathscr{S}(B_\beta)\to\mathscr{S}(B_\beta)$.

证明 设 $x_s\in B_\beta^s$, $r=\{r_n\}\in\mathscr{S}(B_\beta)$. 首先, 由(8.5.10)式的右端表达形式和(8.5.4)式有

$$\begin{aligned}\|\overline{r}_{n,u}\| &\leqslant \sum_{j=n}^{\infty}\|A_u^{-1}\|^{j+1-n}\|\psi_u(r_j)\| \\ &\leqslant \frac{1}{1-\tau}\sup_{j\geqslant n}\|\psi_u(r_j)-\psi_u(0)\| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{1-\tau}\sup_{j\geqslant n}\|r_j\|, \quad n = 0,1,2,\cdots.\end{aligned}$$

由于 $r\in\mathscr{S}(B_\beta)$，故

$$\|\bar{r}_{n,u}\|\leqslant\beta,\quad n=0,1,2,\cdots\quad 且\ \|\bar{r}_{n,u}\|\to 0,\ 当\ n\to\infty\ 时. \tag{8.5.12}$$

其次，$r_{0,s}=x_s\in B_\beta^s$. 设 $0\leqslant m<n$，由(8.5.9)的右端和(8.5.4)式有

$$\begin{aligned}\|\bar{r}_{n,s}\|&\leqslant\|A_s\|^n\cdot\|x_s\|+\sum_{j=0}^{n-1}\|A_s\|^{n-1-j}\|\psi_s(r_j)\|\\&\leqslant\beta\tau^n+\sum_{j=0}^{m-1}\tau^{n-1-j}\|\psi_s(r_j)\|+\sum_{j=m}^{n-1}\tau^{n-1-j}\|\psi_s(r_j)\|\\&\leqslant\beta\tau^n+\beta\varepsilon\tau^{n-m-2}+\frac{\varepsilon}{1-\tau}\sup_{j\geqslant m}\|r_j\|.\end{aligned}$$

注意到 $r\in\mathscr{S}(B_\beta)$时，有$\sup\limits_{j\geqslant m}\|r_j\|\to 0(m\to\infty)$，在上式中先令 $n\to\infty$，再令 $m\to\infty$有

$$\|\bar{r}_{n,s}\|\to 0,\quad n\to\infty,$$

成立. 联合(8.5.12)，并记 $F_n(x_s,r)=\bar{r}_n=(\bar{r}_{n,s},\bar{r}_{n,u})$，有

$$\|\bar{r}_n\|=\max\{\|\bar{r}_{n,s}\|,\|\bar{r}_{n,u}\|\}\to 0,\quad n\to\infty,$$

即 $\bar{r}=\{\bar{r}_n\}\in\mathscr{S}(E)$. 下证 $\|\bar{r}\|\leqslant\beta$，从而 $\bar{r}\in\mathscr{S}(B_\beta)$. 由(8.5.12)式有 $\|\bar{r}_{n,u}\|\leqslant\beta$，对 $n\geqslant 0$ 成立，因而只须证 $\|\bar{r}_{n,s}\|\leqslant\beta$，对 $n\geqslant 0$ 成立. 事实上，$\bar{r}_{0,s}=x_s\in B_\beta^s$，而由

$$\bar{r}_{n,s}=A_s\bar{r}_{n-1,s}+\psi_s(\bar{r}_{n-1}),$$

有

$$\|\bar{r}_{n,s}\|\leqslant\|A_s\|\,\|\bar{r}_{n-1,s}\|+\|\psi_s(\bar{r}_{n-1})-\psi_s(0)\|\leqslant(\tau+\varepsilon)\|\bar{r}_{n-1}\|.$$

由于 $\tau+\varepsilon<1$，$\|\bar{r}_0\|\leqslant\beta$，可施归纳于 n 得

$$\|\bar{r}_{n,s}\|\leqslant\beta,\quad n=0,1,2,\cdots$$

从而结论成立. □

引理 8.5.2　对任一$(x_s,r)\in B_\beta^s\times\mathscr{S}(B_\beta)$，$r=\{r_n\}_{n=0}^\infty$，存在 $y_u\in B_\beta^u$ 使

$$r_n=f^n(x_s,y_u)\Leftrightarrow r=F(x_s,r).$$

证明　由(8.5.9)和(8.5.10)式，知必要性成立，下证充分性. 取

$$y_u=-\sum_{j=0}^{\infty}(A_u)^{-j-1}\psi_u(r_j), \tag{8.5.13}$$

如(8.5.12)中 $\|\bar{r}_{n,u}\|\leqslant\beta$ 的估计，可见 $y_u\in B_\beta^u$. 为核验 y_u 满足

$$r_n=f^n(x_s,y_u),$$

下施归纳于 n. 显然，$n=0$ 时，上式成立；设上式对 n 成立. 于是，对 $n+1$ 有

$$\begin{aligned}
r_{n+1} &= F_{n+1}(x_s, r) \\
&= \Big(A_s\Big(A_s^n x_s + \sum_{j=0}^{n-1} A_s{}^{n-1-j}\psi_s(r_j)\Big) + \psi_s(r_n), \\
&\quad - A_u \sum_{j=n}^{\infty} A_u{}^{-j-1+n}\psi_u(r_j) + \psi_u(r_n)\Big) \\
&= (A_s(r_{n,s}) + \psi_s(r_n), A_u(r_{n,u}) + \psi_u(r_n)) \\
&= f(r_n) \\
&= f^{n+1}(x_s, y_u)
\end{aligned}$$

成立. □

引理 8.5.3 设 $F: B_\beta^s \times \mathscr{S}(B_\beta) \to \mathscr{S}(B_\beta)$ 如前定义, 则存在 $\beta' \in [0, \beta]$ 与唯一的 C^1 类映射 $\varphi: B_\beta^s \to \mathscr{S}(B_{\beta'})$ 使

$$F(x, \varphi(x)) = \varphi(x), \quad \forall\, x \in B_\beta^s.$$

证明 置映射 $\Phi: B_\beta^s \times \mathscr{S}(B_\beta) \to \mathscr{S}(B_\beta)$ 为

$$\Phi(x, r) = r - F(x, r), \qquad \forall\, (x, r) \in B_\beta^s \times \mathscr{S}(B_\beta),$$

显然是连续映射, 且 $\Phi(0,0) = 0$. 首先, 对任一 $u \in \mathscr{S}(B_\beta)$, 证

$$D_r F_n(x, r)(u) = \Big(\sum_{j=0}^{n-1} A_s^{n-1-j} D\psi_s(r_j)(u_j), \ -\sum_{j=n}^{\infty} A_u^{n-1-j} D\psi_u(r_j)(u_j)\Big). \tag{8.5.14}$$

记上式右端为 λ, 考虑

$$\begin{aligned}
&\| F_n(x, r+u) - F_n(x, r) - \lambda \| \\
\leqslant &\Big\| \sum_{j=0}^{n-1} A_s^{n-1-j}[\psi_s(r_j + u_j) - \psi_s(r_j) - D\psi_s(r_j)(u_j)] \Big\| \\
&+ \Big\| \sum_{j=n}^{\infty} A_u^{n-1-j}[\psi_u(r_j + u_j) - \psi_u(r_j) - D\psi_u(r_j)(u_j)] \Big\|.
\end{aligned}$$

注意到 ψ 的假设条件, 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\beta > 0$, 当 $z, w \in B_\beta$ 时, 有估计式

$$\begin{aligned}
&\| \psi(z + w) - \psi(z) - D\psi(z) w \| \\
\leqslant &\| \psi(z + w) - \psi(z) \| + \| D\psi(z) \| \cdot \| w \| \\
\leqslant &2\varepsilon \| w \|.
\end{aligned}$$

于是, 考虑到(8.3.4), 有

$$\begin{aligned}
&\| F_n(x, r+u) - F_n(x, r) - \lambda \| \\
\leqslant &\Big(\sum_{j=0}^{n-1} \| A_s \|^{n-1-j} + \sum_{j=n}^{\infty} \| A_u^{-1} \|^{j+1-n} \Big) \cdot \| \psi(r_j + u_j) \\
&- \psi(r_j) - D\psi(r_j)(u_j) \|
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{2(1+\tau)\varepsilon}{1-\tau} \| u \| .$$

从而(8.5.14)成立.应用(8.5.14),进一步可得

$$\begin{aligned} & \| F(x, r+u) - F(x, r) - \{D_r F_n(x, r) u\} \| \\ \leqslant & \sup_{n \geqslant 0} \| F_n(x, r+u) - F_n(x, r) - D_r F_n(x, r) u \| \\ \leqslant & \frac{2(1+\tau)\varepsilon}{1-\tau} \| u \| , \end{aligned}$$

即

$$D_r F(x, r) u = \{D_r F_n(x, r) u\}$$

成立.显然 $D_r F(0,0)=0$.不难核验,$D_r \Phi(x, r)$在(0,0)点连续,且

$$D_r \Phi(0,0) = I: \mathscr{S}(B_\beta^s) \to \mathscr{S}(B_\beta)$$

显然有有界逆.再由引理8.4.1,存在$\beta' \in (0, \beta]$与唯一的C^1类映射$\varphi: B_{\beta'}^s \to \mathscr{S}(B_{\beta'})$使 $\varphi(0)=0$ 且满足

$$\Phi(x, \varphi(x)) = 0,$$

即

$$F(x, \varphi(x)) = \varphi(x)$$

成立.　□

定理 8.5.1　设$f = A + \psi \in C^1(U, E)$,$A = Df(0) \in H(E)$满足条件(8.3.4),则存在 $\beta>0$ 和 C^1 类映射 $g: B_\beta^s \to B_\beta^u$ 使

$$G = \{(x, g(x)) \mid x \in B_\beta^s\} = W_\beta^s(0, f).$$

证明　由条件所设,存在 $\beta>0$ 使(8.5.3)式成立,且满足引理 8.5.3 的要求;于是,存在唯一的 C^1 类映射 $\varphi: B_\beta^s \to \mathscr{S}(B_{\beta'})$满足引理 8.5.3 的结论.

定义映射 $g: B_\beta^s \to B_\beta^u$ 为

$$g(x) = \pi_u \circ \rho \circ \varphi(x), \qquad \forall x \in B_\beta^s,$$

其中 π_u 是$E \to E^u$ 的投影算子,ρ 如(8.5.6)所定义.由于 π_u 和 ρ 是线性算子,故 g 是C^1 类映射.类似于(8.5.10),注意到

$$g(x) = \varphi_{0,u}(x) = -\sum_{j=0}^{\infty} A_u{}^{-j-1} \psi_u(\varphi_j),$$

如(8.5.13)式,故由引理 8.5.2 有

$$\{f^n(x, g(x))\}_{n=0}^{\infty} = \varphi(x) \in \mathscr{S}(B_\beta), \quad \forall x \in B_\beta^s. \tag{8.5.15}$$

作映射 $g: B_\beta^s \to B_\beta^u$ 的图像

$$G = \{(x, g(x)) \mid x \in B_\beta^s\},$$

下证 $G = W_\beta^s(0, f)$.由(8.5.15)和(8.5.5),显然有

$$G \subset W^s_\beta(0, f). \tag{8.5.16}$$

另一方面,对任一 $x \in W^s_\beta(0, f)$,置

$$x = (x_s, x_u), \quad x' = (x_s, g(x_s)),$$

其中 $x_s \in B^s_\beta$, $x_u \in B^u_\beta$. 于是

$$f^n(x), f^n(x') \in B_\beta, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

显然

$$\| x_u - g(x_s) \| \geqslant 0 = \| x_s - x_s \|,$$

利用命题 8.5.3 施归纳于 n,得

$$\| x_u - g(x_s) \| \leqslant \frac{1}{(\tau^{-1} - \varepsilon)^n} \| f^n(x) - f^n(x') \| \leqslant \frac{2\beta}{(\tau^{-1} - \varepsilon)^n}.$$

注意到 $\tau^{-1} - \varepsilon > 1$, 令 $n \to \infty$ 得

$$x_u = g(x_s).$$

故 $x = x'$, 而 $x' \in G$, 从而

$$W^s_\beta(0, f) \subset G.$$

联合(8.5.16)式有结论成立. □

第九章　双曲不变集的结构稳定性

§9.1　双曲不变集

设 M 是一个光滑的 Riemann 流形，其 Riemann 度量$\langle\cdot,\cdot\rangle$确定的范数记为$|\cdot|$. $U\subset M$ 是开集，$f\in C^1(U,M)$是从 U 到$f(U)$的微分同胚. 紧致集 $\Lambda\subset U$ 是f 的不变集,即

$$f(\Lambda)=\Lambda.$$

对任意的 $x\in M$,记点 x 处 M 的切空间为 T_xM, f 的导算子(丛射,见§6.2或§6.4)

$$\mathrm{d}f_x: T_xM\to T_xM$$

是线性映射.

定义 9.1.1　C^1 同胚 $f: U\to f(U)\subset M$ 的紧致不变集$\Lambda\subset U$ 称为f 的一个双曲不变集,如果切丛 TM 在Λ 上的限制

$$T_\Lambda M=(TM)|_\Lambda,$$

可以分解为关于 $\mathrm{d}f$ 连续的 Whitney 和 $T_\Lambda M=E^u\oplus E^s$,满足

(1)Whitney 和分解关于 $\mathrm{d}f$ 是不变的,即

$$\mathrm{d}f_x(E_x^u)=E_{f(x)}^u,\quad \mathrm{d}f_x(E_x^s)=E_{f(x)}^s,\quad \forall x\in\Lambda,$$

其中 E_x^u, E_x^s 是切空间 T_xM 相应于上述分解的直和分解

$$T_xM=E_x^u\oplus E_x^s.$$

(2)存在常数 $c_1,c_2>0$ 和 $0<\lambda<1$,使得对任意的 $n\in\mathbf{N}$,有

$$|\mathrm{d}f^n(\zeta)|\geqslant c_1\lambda^{-n}|\zeta|,\quad \forall\zeta\in E^u,$$

$$|\mathrm{d}f^n(\eta)|\leqslant c_2\lambda^n|\eta|,\quad \forall\eta\in E^s$$

成立,其中 $\mathrm{d}f^n=(\mathrm{d}f)^n$.

命题 9.1.1　在定义 9.1.1 的条件下,存在与$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 等价的 Riemann 度量$\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$和常数 $0<\tau<1$,使得

$$\|\mathrm{d}f(\zeta)\|\geqslant\tau^{-1}\|\zeta\|,\quad \forall\zeta\in E^u,$$

$$\|\mathrm{d}f(\eta)\|\leqslant\tau\|\eta\|,\quad \forall\eta\in E^s,$$

其中$\|\cdot\|$是由度量$\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$确定的范数.

证明　只须在切丛 TM 上给出与度量$\langle\cdot,\cdot\rangle$等价的 Riemann 度量$\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$,然后用光滑的 Riemann 度量逼近新的度量即可.

设常数 $c_1,c_2>0$ 和 $0<\lambda<1$ 满足定义 9.1.1 中的双曲性条件,于是可取

$c=\max\{c_2, c_1^{-1}\}$，使得

$$|\mathrm{d}f^{-n}(\zeta)|\leqslant c\lambda^n|\zeta|,\quad \forall\,\zeta\in E^u,$$
$$|\mathrm{d}f^{n}(\eta)|\leqslant c\lambda^n|\eta|,\quad \forall\,\eta\in E^s,$$

对一切 $n\in\mathbf{N}$ 成立. 再取映射 $\theta\in C^\infty(M,\mathbf{R})$，满足

(1)$0\leqslant\theta(x)\leqslant 1$, $\forall\, x\in M$.

(2)$\theta(x)=1$, $\forall\, x\in\Lambda$.

(3)$\mathrm{Supp}\theta\subset U$ 是紧集.

对任意的 $\zeta_{1x},\zeta_{2x}\in E_x^u$ 和 $\eta_{1x},\eta_{2x}\in E_x^s$ 置

$$\langle\!\langle\zeta_{1x}+\eta_{1x},\zeta_{2x}+\eta_{2x}\rangle\!\rangle$$
$$=\begin{cases}\langle\zeta_{1x},\zeta_{2x}\rangle+\langle\eta_{1x},\eta_{2x}\rangle+\\ \quad\theta(x)\sum\limits_{n>0}[\langle\mathrm{d}f_x^n\eta_{1x},\mathrm{d}f_x^n\eta_{2x}\rangle+\langle\mathrm{d}f_x^{-n}\zeta_{1x},\mathrm{d}f_x^{-n}\zeta_{2x}\rangle],\quad\forall\,x\in U,\\ \langle\zeta_{1x}+\eta_{1x},\zeta_{2x}+\eta_{2x}\rangle,\quad\forall\,x\,\overline{\in}\,U.\end{cases}$$

显而易见，对 $u\in E_x^u$ 或 E_x^s，均有

$$|u|\leqslant\|u\|\leqslant\frac{c}{\sqrt{1-\lambda^2}}|u|,$$

其中范数 $\|\cdot\|$ 由内积《·,·》所确定. 于是，$|\cdot|$ 与 $\|\cdot\|$ 等价.

又当 $\eta\in E_x^s$ 时，有

$$\begin{aligned}\|\eta\|^2&=|\eta|^2+\sum_{n>0}\langle\mathrm{d}f^n\eta,\mathrm{d}f^n\eta\rangle\\ &=|\eta|^2+\|\mathrm{d}f\eta\|^2\\ &\geqslant c^{-2}(1-\lambda^2)\|\eta\|^2+\|\mathrm{d}f\eta\|^2.\end{aligned}$$

取 $\tau^2=1-(1-\lambda^2)/c^2$，从而

$$\|\mathrm{d}f\eta\|\leqslant\tau\|\eta\|,\quad\forall\,\eta\in E_x^s.$$

类似可证

$$\|\mathrm{d}f^{-1}\zeta\|\leqslant\tau\|\zeta\|,\quad\forall\,\zeta\in E_x^u.$$ □

定义 9.1.2 如果 M 是紧致光滑的 Riemann 流形，$f\in\mathrm{Diff}^1(M)$以整个 M 为其双曲不变集，则称 f 为 Anosov 微分同胚，或简称 f 是 Anosov 的.

例 9.1.1 考虑 n 维环面

$$T^n=\{[x]\,|\,x\in\mathbf{R}^n\},$$
$$[x]=\{y\,|\,x-y\in\mathbf{Z}^n,y\in\mathbf{R}^n\}$$

上的线性自同构 $A:T^n\to T^n$，其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是 n 阶方阵，$a_{ij}\in\mathbf{Z}$, $\det A=\pm1$. 因为 $A^{-1}=(b_{ij})_{n\times n}$满足 $b_{ij}\in\mathbf{Z}$，故 A 是 T^n上的一个同胚. 若 A 的特征值不在复平面 C 的单位园 S^1 上，即

$$\sigma(A)\cap S^1=\varnothing,$$

则 $\mathbf{R}^n$ 有 A 的不变直和分解

$$\mathbf{R}^n = E^u \oplus E^s,$$

使得 $A|_{E^s}$ 和 $A|_{E^u}$ 分别是压缩的和扩张的.

对每一 $x \in T^n$, 显见 $\mathrm{d}A(x) = A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, 且相应地有关于 $\mathrm{d}A(x)$ 不变的直和分解

$$T_x T^n = E_x^u \oplus E_x^s,$$

其中 $E_x^u = E^u$, $E_x^s = E^s$. 故 A 在整个 n 维环面 T^n 上均有双曲构造, 称 $A: T^n \to T^n$ 为双曲线性自同构, 于是, A 是 Anosov 的. 当 $n=2$ 时, 即为 §7.3 中讨论过的二维环面双曲自同构, 其结构稳定性是后面给出的 Anosov 微分同胚结构稳定性定理的特例.

另一方面, Manning[108] 指出, n 维环面 T^n 上的每一个 Anosov 微分同胚均拓扑共轭于一个 T^n 上的双曲线性自同构, 从而环面上的 Anosov 微分同胚有简单的拓扑分类. 但这一结论不能推广到一般微分流形上[109].

注 9.1.1　在定理 8.1.3 中给出了 Banach 空间上可逆线性映射 A 的双曲性的定义, 即

$$A \in H(E) \Leftrightarrow \sigma(A) \cap S^1 = \varnothing.$$

同样, 对于定义 9.1.1 给出的双曲集 Λ 的定义, Mather[110] 给出了另一种等价的定义. 用 $\Gamma^0(T_\Lambda M)$ 表示向量丛 $T_\Lambda M$ 的连续截面空间, 线性算子

$$f_*: \Gamma^0(T_\Lambda M) \to \Gamma^0(T_\Lambda M)$$

满足

$$(f_* u)(x) = Dfu(f^{-1}(x)) = Df_{f^{-1}(x)} u_{f^{-1}(x)},$$

其中 $u_{f^{-1}(x)} \in T_{f^{-1}(x)}M$. 若

$$\sigma(f_*) \cap S^1 = \varnothing,$$

则称 f 的紧致不变集 Λ 是双曲的.

关于这两种定义的等价性证明, 也可见文献[60].

下面讨论双曲集的判定问题, 即给出紧致不变集具双曲构造的充分条件.

定理 9.1.1　设 U 是光滑 Riemann 流形 M 中的开集, 紧集 $\Delta \subset U$ 是微分同胚

$$g \in C^1(U, M): U \to g(U)$$

的不变集. 如果对于切丛 TM 在 Δ 上的限制 $E = T_\Delta M$ 的 Whitney 和分解

$$E = E^1 \oplus E^2,$$

切映射 $\mathrm{d}g$ 及其逆 $\mathrm{d}g^{-1}$ 分别表示为

$$\mathrm{d}g = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}: E^1 \oplus E^2 \to E^1 \oplus E^2,$$

$$dg^{-1}=\begin{bmatrix}\widetilde{G}_{11} & \widetilde{G}_{12}\\ \widetilde{G}_{21} & \widetilde{G}_{22}\end{bmatrix}:E^1\oplus E^2\to E^1\oplus E^2,$$

满足条件

$$\max\{|G_{11}^{-1}|,|G_{22}|,|\widetilde{G}_{11}|,|\widetilde{G}_{22}^{-1}|\}<\lambda,$$

$$\max\{|G_{12}|,|G_{21}|,|\widetilde{G}_{12}|,|\widetilde{G}_{21}|\}<\varepsilon,$$

其中范数$|\cdot|$由度量$<\cdot,\cdot>$导出,常数λ和ε分别满足

$$0<\lambda<1,\quad 0<\varepsilon<\min\{1-\lambda,\lambda^{-1}-1\},$$

则g在Δ上有双曲构造,即Δ是g的双曲不变集.

在证明定理9.1.1之前,先证明如下引理.

引理 9.1.1 记

$$B_1(E^1,E^2)=\{S\in L(E^1,E^2)\,|\,|S|\leqslant 1\},$$

在定理9.1.1的条件下,映射$\mathscr{T}:B_1(E^1,E^2)\to B_1(E^1,E^2)$的定义

$$S\mapsto(G_{21}+G_{22}S)(G_{11}+G_{12}S)^{-1},\ \forall S\in B_1(E^1,E^2),$$

有意义,且存在唯一的$P\in B_1(E^1,E^2)$使

$$\mathscr{T}\circ P=P.$$

证明 设$S\in B_1(E^1,E^2)$,由

$$|G_{12}S|\leqslant|G_{12}|<\varepsilon<\lambda^{-1}<|G_{11}^{-1}|^{-1},$$

知$(G_{11}+G_{12}S)^{-1}$存在,且

$$|(G_{11}+G_{12}S)^{-1}|\leqslant\frac{1}{|G_{11}^{-1}|^{-1}-|G_{12}S|}\leqslant\frac{1}{\lambda^{-1}-\varepsilon}.$$

于是,映射$\mathscr{T}$在$B_1(E^1,E^2)$上有定义,且

$$|\mathscr{T}(S)|\leqslant|G_{21}+G_{22}S|\cdot|(G_{11}+G_{12}S)^{-1}|\leqslant\frac{\lambda+\varepsilon}{\lambda^{-1}-\varepsilon}<1,$$

易见$\mathscr{T}:B_1(E^1,E^2)\to B_1(E^1,E^2)$.下面,记

$$\mu=\frac{\lambda+\varepsilon}{\lambda^{-1}-\varepsilon}<1.\tag{9.1.1}$$

定义完备度量空间$\Gamma^0(B_1(E^1,E^2))$到自身的映射

$$\widetilde{\mathscr{T}}:\Gamma^0(B_1(E^1,E^2))\to\Gamma^0(B_1(E^1,E^2)),$$

$$\widetilde{\mathscr{T}}(\sigma)=\mathscr{T}\circ\sigma\circ g^{-1},\quad\forall\sigma\in\Gamma^0(B_1(E^1,E^2)).$$

易知$\mathscr{T}$是覆盖g的一个保持纤维的映射,且沿纤维的微分

$$\begin{aligned}&((\widetilde{D}\mathscr{T})_\sigma)S\\ &=G_{22}S(G_{11}+G_{12}\sigma)^{-1}-(G_{21}+G_{22}\sigma)(G_{11}+G_{12}\sigma)^{-1}G_{12}S(G_{11}+G_{12}\sigma)^{-1}\\ &=(G_{22}-\mathscr{T}(\sigma)G_{12})S(G_{11}+G_{12}\sigma)^{-1},\end{aligned}$$

因而,

$$|(\tilde{D}\mathscr{T})_\sigma| \leqslant (|G_{22}| + |\mathscr{H}(\sigma)| \cdot |G_{12}|)|(G_{11} + G_{12}\sigma)^{-1}| \leqslant \mu < 1.$$

由 Palais 引理(见§6.5),有

$$|(D\tilde{\mathscr{T}})_\sigma| \leqslant \mu < 1, \quad \forall \sigma \in \Gamma^0(B_1(E^1, E^2)),$$

从而 $\tilde{\mathscr{T}}$ 是完备度量空间 $\Gamma^0(B_1(E^1, E^2))$ 上的一个压缩映射.注意到

$$\begin{aligned}|\mathscr{T}(\sigma_1) - \mathscr{T}(\sigma_2)| &= \sup_{x\in\Delta}|(\mathscr{T}(\sigma_1) - \mathscr{T}(\sigma_2))(x)| \\ &= \sup_{x\in\Delta}|(\mathscr{T}(\sigma_1) - \mathscr{T}(\sigma_2))g^{-1}(x)| \\ &= |\tilde{\mathscr{H}}(\sigma_1) - \tilde{\mathscr{H}}(\sigma_2)|.\end{aligned}$$

可断言 $\mathscr{T}$ 是压缩映射,故引理的结论成立. □

引理 9.1.2　在定理 9.1.1 的条件下,存在连续截面 $P \in \Gamma^0(B_1(E^1, E^2))$ 和 $Q \in \Gamma^0(B_1(E^2, E^1))$,使

$$F^1 = (id, P)E^1, \quad F^2 = (Q, id)E^2$$

对切映射 dg 不变,且有连续的 Whitney 和

$$T_\Delta M = F^1 \oplus F^2.$$

证明　由引理 9.1.1,可知存在唯一的 $P \in \Gamma^0(B_1(E^1, E^2))$ 满足

$$|P| = \sup_{x\in\Delta}|\mathscr{T} \circ P(x)| \leqslant \mu < 1,$$

其中 μ 如(9.1.1).类似,存在唯一的 $Q \in \Gamma^0(B_1(E^2, E^1))$ 同样满足

$$|Q| \leqslant \mu < 1.$$

由此可知

$$F_x^1 \cap F_x^2 = \{O_x\}, \quad \forall x \in \Delta, \tag{9.1.2}$$

其中 O_x 表示纤维 $E_x = T_xM$ 的零向量.事实上,如果存在 $\zeta_{x,1} \in E_x^1$, $\eta_{x,2} \in E_x^2$ 使

$$(\zeta_{x,1}, P\zeta_{x,1}) = (Q\eta_{x,2}, \eta_{x,2}),$$

而

$$E_x^1 \cap E_x^2 = \{O_x\}, \quad \forall x \in \Delta,$$

故

$$(\zeta_{x,1}, \eta_{x,2}) \in \{O_x\},$$

即(9.1.2)式成立.另一方面,显然有

$$\dim F_x^1 + \dim F_x^2 = \dim E_x^1 + \dim E_x^2 = \dim E_x, \quad \forall x \in \Delta,$$

因而有连续的 Whitrey 和

$$T_\Delta M = E = F^1 \oplus F^2.$$

下证 F^1 关于切映射 dg 不变.首先,由

$$P = \mathscr{T}P = (G_{21} + G_{22}P)(G_{11} + G_{12}P)^{-1},$$

显然有

$$\mathrm{d}gF^1 = \mathrm{d}g(id, P)E^1 \subset (id, P)E^1 = F^1.$$

再对任意的 $\eta = (\eta_1, P\eta_1) \in F^1$，置

$$\zeta_1 = (G_{11} + G_{12}P)^{-1}\eta_1 \in E^1,$$

$$\zeta = (\zeta_1, P\zeta_1) \in F^1,$$

于是

$$(G_{11} + G_{12}P)\zeta_1 = \eta_1,$$

$$(G_{21} + G_{22}P)\zeta_1 = (G_{21} + G_{22}P)(G_{11} + G_{22}P)^{-1}\eta_1 = P\eta_1,$$

即存在 $\zeta \in F^1$，使 $\mathrm{d}g\zeta = \eta$，或 $\mathrm{d}gF^1 \supset F^1$，从而

$$\mathrm{d}gF^1 = F^1.$$

类似可证

$$\mathrm{d}gF^2 = F^2.$$

故结论成立. □

引理 9.1.3 在定理 9.1.1 的条件下，存在常数 $c > 0$，使

$$|\mathrm{d}g^n(\zeta)| \geqslant c\gamma^{-n}|\zeta|, \quad \forall \zeta \in F^1,$$

$$|\mathrm{d}g^{-n}(\zeta)| \geqslant c\gamma^{-n}|\zeta|, \quad \forall \zeta \in F^2,$$

对一切 $n \in \mathbf{N}$ 成立，其中 $0 < \gamma = (\lambda^{-1} - \varepsilon)^{-1} < 1$.

证明 对任意 $\eta = \eta_1 + \eta_2 \in T_\Delta M$, $\eta_1 \in E^1$, $\eta_2 \in E^2$，置

$$\|\eta\| = \max\{|\eta_1|, |\eta_2|\},$$

则范数 $\|\cdot\|$ 与范数 $|\cdot|$ 等价. 即存在常数 $0 < b_1, b_2$ 使

$$b_1\|\eta\| \leqslant |\eta| \leqslant b_2\|\eta\|, \quad \forall \eta \in T_\Delta M.$$

设

$$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in F^1, \quad \zeta_1 \in E^1, \zeta_2 = P\zeta_1,$$

由 $|P| \leqslant \mu < 1$，有

$$|\zeta_2| = |P\zeta_1| \leqslant \mu|\zeta_1| \leqslant |\zeta_1|.$$

因而

$$\begin{aligned} \|\zeta\| &= \max\{|\zeta_1|, |\zeta_2|\} = |\zeta_1| \\ &= |(G_{11} + G_{12}P)^{-1}(G_{11} + G_{12}P)\zeta_1| \\ &\leqslant \gamma|(G_{11} + G_{12}P)\zeta_1| \\ &\leqslant \gamma\|\mathrm{d}g\zeta\|, \end{aligned}$$

于是

$$|\mathrm{d}g^n\zeta| \geqslant b_1\|\mathrm{d}g^n\zeta\| \geqslant \frac{b_1}{b_2}\gamma^{-n}|\zeta|, \quad n \in \mathbf{N}.$$

令 $c=\dfrac{b_1}{b_2}$有结论第一式成立.类似可证第二式. □

定理 9.1.1 的证明　由引理9.1.2和引理9.1.3易知定理9.1.1成立. □

下面的讨论将指出,当 f 的紧致不变集 $\Lambda\subset U$ 是双曲不变集时,存在 Λ 的邻域 $U_\Lambda\subset U$ 和 f 的 C^1 邻域 $\mathscr{U}_f$,如果 $g\in\mathscr{U}_f$ 存在紧不变集 $\Delta\subset U_\Lambda$,则 g 在 Δ 上具有双曲构造.

设

$$T_\Lambda M = E^u\oplus E^s,$$

由于 Λ 的紧性,故可被有限个两两不交的开集所覆盖,使得 E^u 和 E^s 在每一块开覆盖集上的维数是一常数,不妨设在 Λ 上有

$$\dim E^u = k,\quad \dim E^s = l.$$

考虑 M 上的 Grassmann 丛

$$G^u = \bigcup_{x\in M}\{T_xM \text{ 的 } k \text{ 维子空间}\}$$

和

$$G^s = \bigcup_{x\in M}\{T_xM \text{ 的 } l \text{ 维子空间}\},$$

则

$$E^u:\Lambda\to G^u$$

和

$$E^s:\Lambda\to G^s$$

分别是 $G^u|_\Lambda$ 和 $G^s|_\Lambda$ 的连续截面,可以证明,存在 Λ 的邻域 U_Λ 和连续截面

$$E^1:U_\Lambda\to G^u,\quad E^2:U_\Lambda\to G^s,$$

使

$$E^1|_\Lambda = E^u,\quad E^2|_\Lambda = E^s.$$

从而,对适当的 U_Λ,可使

$$T_{U_\Lambda}M = E^1\oplus E^2.$$

这就是下面的引理.

引理 9.1.4　设 Λ 是微分流形 M 内的紧集,且

$$T_\Lambda M = E^u\oplus E^s,$$

则存在 Λ 的一个邻域 U 使

$$T_UM = E^1\oplus E^2,$$

满足条件

$$E^1|_\Lambda = E^u,\quad E^2|_\Lambda = E^s.$$

定理 9.1.2　设 U 是光滑 Riemann 流形 M 内的开集,$f\in C^1(U,M)$是从 U 到 $f(U)$的微分同胚,如果紧集 $\Lambda\subset U$ 是 f 的双曲不变集,则存在 Λ 的

邻域 U_Λ 和 f 的 C^1 邻域 $\mathscr{U}_f$，当 $\Delta\subset U_\Lambda$ 是 $g\in\mathscr{U}_f$ 的紧致不变集时，也是 g 的双曲不变集.

证明 设 Λ 是 f 的紧致双曲不变集，则 T_Λ 可分解为关于 f 不变的 Whitney 和

$$T_\Lambda M = E^u \oplus E^s,$$

且满足

$$|(df^{-1}|E^u)| \leqslant \tau < 1,$$
$$|(df|E^s)| \leqslant \tau < 1.$$

按引理 9.1.4，存在 Λ 的一个邻域 U_Λ 使

$$T_{U_\Lambda}M = E^1 \oplus E^2,$$

满足

$$E^1|_\Lambda = E^u, \quad E^2|_\Lambda = E^s,$$

对任意 $g\in\mathscr{U}_f$，在 g 的紧致不变集 $\Delta\subset U_\Lambda$ 上，dg 和 dg^{-1} 用分块矩阵表示为

$$dg = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}: E^1\oplus E^2|_\Delta \to E^1\oplus E^2|_\Delta,$$

$$dg^{-1} = \begin{bmatrix} \widetilde{G}_{11} & \widetilde{G}_{12} \\ \widetilde{G}_{21} & \widetilde{G}_{22} \end{bmatrix}: E^1\oplus E^2|_\Delta \to E^1\oplus E^2|_\Delta$$

取 U_Λ 和 $\mathscr{U}_f$ 充分小，使

$$\max\{|G_{11}^{-1}|, |G_{22}|, |\widetilde{G}_{11}|, |\widetilde{G}_{22}^{-1}|\} < \tau + \varepsilon = \lambda,$$
$$\max\{|G_{12}|, |G_{21}|, |\widetilde{G}_{12}|, |\widetilde{G}_{22}|\} < \varepsilon.$$

其中

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(1-\tau).$$

显然满足

$$0 < \lambda < 1, \qquad 0 < \varepsilon < \min\{1-\lambda, \lambda^{-1}-1\}.$$

按定理 9.1.1，g 的紧不变集 Δ 是双曲不变集. □

§9.2 α 伪轨与β跟踪

α 伪轨的概念和 β 跟踪的技术是研究光滑动力系统的重要工具，不仅在本章用于双曲不变集结构稳定性的研究，而且对于公理 A 微分同胚的无环条件还可以给出较为简单的陈述，同时，在紊动双曲不变集、横截同宿点等问题的研究中，都有重要的应用. 本节的主要结论是 1969 年 D. V. Anosov[111] 建立的伪轨族跟踪定理，类似的结论还有 R. Bowon[112,113] 的工作.

首先对一般的度量空间给出 α 伪轨和 β 跟踪的概念.

设 (X,d) 是一度量空间,记

$$\mathrm{Homeo}(X) = \{f: X \to X \text{ 同胚}\}.$$

定义 9.2.1 设 (X,d) 是度量空间, $f\in \mathrm{Homeo}(X)$, 实数 $\alpha>0$, $a,b\in \mathbf{Z}$, $a<b$, 称度量空间 X 中的点列 $\{x_j\}_{j=a}^{b}\subset X$ 是 f 的一个 α 伪轨,如果

$$d(f(x_j),x_{j+1})<\alpha,\quad \forall j=a,\cdots,b-1,$$

其中 a 可以为 $-\infty$, 而 b 可以为 $+\infty$; 又称 α 伪轨 $\{x_j\}_{j=a}^{b}$ 被过 $x\in X$ 的轨道 $\mathrm{Orb}_f(x)$ 所 β 跟踪,若对任意 $a\leqslant n\leqslant b$ 有

$$d(f^n(x),x_n)<\beta.$$

命题 9.2.1 设 (X,d) 是紧致度量空间, $f\in\mathrm{Homeo}(X)$, 对任给的 $\beta>0$ 及 $N\in\mathbf{N}$, 存在 $\alpha>0$, 使得任何长度为 $N+1$ 的 α 伪轨 $\{x_j\}_{j=0}^{N}$ 可以被轨迹 $\mathrm{Orb}_f(x_0)$ 所 β 跟踪.

证明 f 在紧空间 X 上是一致连续的,对任给 $\beta>0$ 及 $N\in\mathbf{N}$, 存在 $\alpha>0$, 对任意的 $u,v\in X$ 有

$$d(u,v)<\alpha\Rightarrow d(f^m(u),f^m(v))<\frac{\beta}{N},\quad m=0,1,\cdots,N.$$

特别地

$$d(f(x_j),x_{j+1})<\alpha\Rightarrow d(f^{k-j}(x_j),f^{k-j-1}(x_{j+1}))<\frac{\beta}{N},$$

其中 $0\leqslant j<k\leqslant N$. 于是

$$d(f^k(x_0),x_k)\leqslant d(f^k(x_0),f^{k-1}(x_1))+d(f^{k-1}(x_1),f^{k-2}(x_2))+\cdots$$
$$+d(f(x_{k-1}),x_k)<\beta,\quad k=1,2,\cdots,N.$$ □

下设 M 是光滑的 Riemann 流形,对任意 $x,y\in M$, 记 $d(x,y)$ 为 M 上 Riemann 度量诱导出的 x 与 y 间的距离. 于是,在 M 上可以导入定义 9.2.1. 又设 $U\subset M$ 为开集, U 的闭包 $\overline{U}$ 紧致,映射 $f: U\to M$ 是从 U 到 $f(U)$ 的 C^1 同胚. $\Lambda\subset U$ 是 f 的双曲不变集. 设 X 是拓扑空间,如果连续映射 $\varphi: X\to M$ 和 $\psi: X\to M$, 使

$$\sup_{x\in X} d(\varphi(x),\psi(x))<+\infty,$$

则定义度量

$$P(\varphi,\psi)=\sup_{x\in X} d(\varphi(x),\psi(x)).$$

利用光滑连通 Riemann 流形上的指数映射(§6.4)方法,可以证明下面的 Anosov 伪轨跟踪定理.

定理 9.2.1 (Anosov 伪轨族跟踪定理) 在上述说明的记号和条件下,存在双曲不变集 Λ 的邻域 $U(\Lambda)\subset U$ 及实数 α_0、$\beta_0>0$ 具如下性质:任给 $\beta>$

0,存在 $\alpha>0$,使得对任意的 C^1 同胚

$$f_1: U(\Lambda) \to f_1(U(\Lambda)) \subset M,$$

与任意拓扑空间 X 上的任意同胚

$$g: X \to X,$$

及任意的连续映射

$$\varphi: X \to U(\Lambda),$$

只要在空间 $C^1(U(\Lambda), M)$ 中的度量 d_{C^1} 下,有

$$d_{C^1}(f, f_1) < \alpha_0. \tag{9.2.1}$$

以及

$$P(\varphi \circ g, f_1 \circ \varphi) < \alpha, \tag{9.2.2}$$

就存在连续映射 $\psi: X \to U(\Lambda)$ 使得

$$\psi \circ g = f_1 \circ \psi \tag{9.2.3}$$

且

$$P(\varphi, \psi) < \beta. \tag{9.2.4}$$

特别地,如果存在连续映射 $\psi': X \to U(\Lambda)$ 满足

$$\psi' \circ g = f_1 \circ \psi' \text{ 且 } P(\varphi, \psi') < \beta_0$$

则

$$\psi' = \psi,$$

即 ψ 是唯一的. □

在证明定理 9.2.1 之前,先说明如下记号并给出相应的引理. 记

$$C_\varphi(X, TM) = \{u \in C(X, TM) \mid u(x) \in T_{\varphi(x)}(M), \forall x \in X\},$$

并赋以上确界范数

$$\| u; C_\varphi \| = \sup_{x \in X} \| u(x) \|,$$

使之成为 Banach 空间,并记

$$B(\varphi, t) = \{\psi \in C(X, M) \mid P(\psi, \varphi) < t\},$$

$$V_\varphi(t) = \{v \in C_\varphi(X, TM) \mid \| v; C_\varphi \| < t\}.$$

设 $0<\delta<1$,记

$$\mathscr{U}_\delta = \{h: U(\Lambda) \to h(U(\Lambda)) \text{ 的 } C^1 \text{ 同胚} \mid d_{C^1}(h, f) < \delta\}.$$

又设 $T_x(M)$ 关于 f 的导射 $\mathrm{d}f$ 在 Λ 上的不变的 Whitney 和分解为

$$T_x(M) = E_x^u \oplus E_x^s, \quad \forall x \in \Lambda, \tag{9.2.5}$$

其中 E_x^u 和 E_x^s 满足

$$\mathrm{d}f_x(E_x^u) = E_{f(x)}^u, \quad \mathrm{d}f_x(E_x^s) = E_{f(x)}^s, \quad \forall x \in \Lambda.$$

用 P_x^u 和 P_x^s 分别表示从 $T_x(M)$ 到 E_x^u 和 E_x^s 的投影算子.

引理 9.2.1 设 $\Lambda \subset U$ 是同胚 $f: U \to f(U)$ 的双曲不变集,则存在 Λ 的

邻域 $U_1(\Lambda)\subset U$ 使 Whitney 和分解式(9.2.5)能够连续地延拓到一切 $x\in U_1(\Lambda)$内.

引理 9.2.2 取 $\varphi\in C(X,U(\Lambda))$,置

$$B^u = \{u\in C_\varphi(X,TM)\mid u(x)\in E^u_{\varphi(x)},\ \forall x\in X\},$$
$$B^s = \{v\in C_\varphi(X,TM)\mid v(x)\in E^s_{\varphi(x)},\ \forall x\in X\},$$

则 B^u 和 B^s 是 $C_\varphi(X,TM)$的闭子空间,且

$$C_\varphi(X,TM) = B^s\oplus B^u. \tag{9.2.6}$$

引理 9.2.3 设 $\Lambda\subset U$ 是同胚 $f: U\to f(U)$的双曲不变集,则存在 Λ 的邻域 $U(\Lambda)\subset U$ 及数 $0<\tau<1, 0<\delta<1$,使得对任意 $x\in U(\Lambda)$, $f_1\in\mathscr{U}_\delta$,有

$$\|P^u_{f_1(x)}\mathrm{d}f_1v\| > \tau^{-1}\|v\|,\quad \|P^s_{f_1(x)}\mathrm{d}f_1v\| < \frac{\tau}{a}\|v\|,\quad \forall v\in E^u_x, \tag{9.2.7}$$

其中,$a>1$ 是某个常数,及

$$\|P^s_{f_1(x)}\mathrm{d}f_1u\| < \tau\|u\|,\quad \|P^u_{f_1(x)}\mathrm{d}f_1u\| < \frac{\tau}{a}\|u\|,\quad \forall u\in E^s_x \tag{9.2.8}$$

成立,其中范数 $\|\cdot\|$ 是与 Riemann 度量等价的范数.

证明 由引理 9.2.1 存在 Λ 的邻域 $U(\Lambda)$满足

$$\Lambda\subset U(\Lambda)\subset U_1(\Lambda)\subset U$$

使得 Whitney 和分解式(9.2.5)对 $\forall x\in U(\Lambda)$成立,并且存在 $0<\tau<1$ 及等价的 Riemann 度量使

$$\|\mathrm{d}fv\| > \tau^{-1}\|v\|,\quad \forall v\in E^u,$$
$$\|\mathrm{d}fu\| < \tau\|u\|,\quad \forall u\in E^s$$

成立.

于是,取适当的 $0<\delta<1$,对任意的 $x\in U(\Lambda)$和 $f_1\in\mathscr{U}_\delta$ 有(9.2.7)和(9.2.8)成立. □

引理 9.2.4 对任意的$\theta>0$,存在$\eta(\theta)>0$,当$x,y\in M$且$d(x,y)<\eta(\theta)$时,成立

(1) $1-\theta<\|(\mathrm{Dexp}_x^{-1})_yv\|/\|v\|<1+\theta,\ \forall v\in T_yM$,

(2) $\|P^u_x(\mathrm{Dexp}_x^{-1})_yv\|<\theta\|v\|,\quad \forall v\in E^s_y$,

(3) $\|P^s_x(\mathrm{Dexp}_x^{-1})_yv\|<\theta\|v\|,\quad v\in E^u_y$,

其中 D 是导算子,$\exp_x^{-1}$ 是指数映射 $\exp_x$ 的逆(见§6.4).

证明 由定理 6.4.1,对任意的 $g\in M$,有

$$(\mathrm{Dexp}_g^{-1})_g = id: T_g(M)\to T_g(M).$$

由此可证结论(1),(2)和(3)成立. □

引理 9.2.5 设映射 $W: V_\varphi(t) \to V_\varphi(t)$ 为

$$W(u) = (DW)_0 u + H(u), \quad \forall u \in V_\varphi(t),$$

若满足条件

(1)存在 $R>0$ 使 $\|((DW)_0 - id)^{-1}\| < R$,

(2) $\|DH(v)\| < 1/(2R), \quad \forall v \in V_\varphi(t)$,

(3) $\|H(0)\| < t/(2R)$,

则 W 在 $V_\varphi(t)$ 中存在唯一的不动点 u.

证明 定义映射

$$T(u) = -((DW)_0 - id)^{-1} \circ H(u), \quad \forall u \in V_\varphi(t),$$

由于 $V_\varphi(t)$ 是凸集,对任意 $u_1, u_2 \in V_\varphi(t)$ 有

$$u_2 + \tau(u_1 - u_2) \in V_\varphi(t), \quad \forall \tau \in [0,1],$$

于是

$$\begin{aligned}\|T(u_1) - T(u_2)\| &\leqslant R\|H(u_1) - H(u_2)\| \\ &= R\left\|\int_0^1 DH(u_2 + \tau(u_1 - u_2))(u_1 - u_2)d\tau\right\| \\ &< \|u_1 - u_2\|/2.\end{aligned}$$

并且

$$\|T(0)\| \leqslant R\|H(0)\| \leqslant t/2.$$

于是,T 存在唯一的不动点 $u \in V_\varphi(t)$,即

$$-((DW_0) - id)^{-1} \circ H(u) = u,$$

或者说 W 有唯一不动点 $u \in V_\varphi(t)$. □

下面进行定理 9.2.1 的证明.

定理 9.2.1 的证明 任意给定拓扑空间 X、同胚 $g: X \to X$、连续映射 $\varphi: X \to U(\Lambda)$ 和满足

$$d_{C^1}(f, f_1) < \alpha_0$$

的同胚 f_1 如题设.

由定理6.4.3,存在仅与 M 的度量有关的 $r>0$,不妨取 $0<r\leqslant\beta$,对 $\varphi(x) \in U(\Lambda)$ 使得指数映射

$$\exp_{\varphi(x)}: \{\xi \in T_{\varphi(x)}(M) \mid \|\xi\| < r\} \to B(\varphi(x), r)$$

是光滑同胚,其中

$$B(\varphi(x), r) = \{p \in M \mid d(\varphi(x), p) < r\}.$$

即

$$\exp_\varphi: \{\xi \in T_{\varphi(\cdot)}(M) \mid \|\xi\| < r\} \to B(\varphi(\cdot), r)$$

是光滑同胚.从而

$$\exp_{\varphi}^{-1}: B(\varphi, r) \to V_{\varphi}(r),$$
$$\psi \mapsto \exp_{\varphi}^{-1}\psi \in V_{\varphi}(r), \quad \forall \psi \in B(\varphi, r)$$

是光滑同胚. 其中, 映射 $\exp_{\varphi}^{-1}\psi \in V_{\varphi}(r)$ 在点 $x \in X$ 处的值

$$\exp_{\varphi}^{-1}\psi|_x = \exp_{\varphi(x)}^{-1}\psi(x) \in T_{\varphi(x)}(M).$$

定义映射

$$G: X \to \{G_x | G_x: B(\varphi, r) \to T_{\varphi(x)}(M), \forall x \in X\}$$

为

$$G_x(\psi) = \exp_{\varphi(x)}^{-1}\psi(x), \quad \forall \psi \in B(\varphi, r), x \in X$$

是可逆映射. 又定义映射

$$F: B(\varphi, r) \to C(X, M)$$

为

$$F(u) = f_1 \circ u \circ g^{-1}, \quad \forall u \in B(\varphi, r).$$

记

$$F^{\varphi} = G \circ F \circ G^{-1}: V_{\varphi}(r) \to C_{\varphi}(X, TM),$$

于是, 对任意的 $v \in V_{\varphi}(r)$ 和 $x \in X$, 有

$$\begin{aligned} F^{\varphi}(v)(x) &= (G \circ F \circ G^{-1})(v)|_x \\ &= \exp_{\varphi(x)}^{-1} \circ f_1 \circ \exp_{(\varphi \circ g^{-1})(x)} v(g^{-1}(x)). \end{aligned}$$

由上式右端知 F^{φ} 关于 v 是 C^1 的, 且在 $x=0$ 处的微分是

$$\begin{aligned} &((DF^{\varphi})_0 u)(x) \\ &= (\mathrm{Dexp}_{\varphi(x)}^{-1})_{f_1(\varphi(g^{-1}(x)))} \circ (Df_1)_{\varphi(g^{-1}(x))} u(g^{-1}(x)), \quad \forall u \in C_{\varphi}(X, TM), \end{aligned}$$

将 F^{φ} 表示为

$$F^{\varphi}(u) = (DF^{\varphi})_0 u + H(u), \quad \forall u \in V_{\varphi}(r). \tag{9.2.9}$$

下证 F^{φ} 在 $V_{\varphi}(r)$ 内存在不动点 u.

首先, 相应于引理 9.2.2 的分解式(9.2.6), 线性算子 $(DF^{\varphi})_0$ 有如下表示

$$(DF^{\varphi})_0 = \begin{pmatrix} A^{ss} & A^{su} \\ A^{us} & A^{uu} \end{pmatrix}.$$

其中

$$A^{ss}: B^s \to B^s, \quad A^{su}: B^u \to B^s,$$
$$A^{us}: B^s \to B^u, \quad A^{uu}: B^u \to B^u.$$

利用引理 9.2.3 中(9.2.7)、(9.2.8)式, 以及引理 9.2.4, 可取连续依赖于 M 上的 Riemann 度量的充分小的 $\theta > 0$ 及充分小的 $\alpha_0 > 0$, 使 $\alpha_0 \leqslant \delta$ 且当 $f_1 \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$ 满足条件

$$P(\varphi \circ g, f_1 \circ \varphi) < \min(\theta, r)$$

时,成立

$$\| A^{ss} \| < \frac{1+\tau}{2}, \quad \| A^{su} \| < \frac{\tau}{10}$$

$$\| A^{us} \| < \frac{\tau}{10}, \quad \| A^{uu} \| > \left(\frac{1+\tau}{2} \right)^{-1}.$$

因此,对任何复数 $\lambda \in \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| = 1\}$,其中 $\mathbf{C}$ 是复平面,利用定理 8.1.3 和定理 8.1.4 可以证明,$((\mathrm{D}F^{\varphi})_0 - \lambda id)^{-1}$ 存在,且存在与 X, g 和 φ 无关的常数 $R>0$,使

$$\| ((\mathrm{D}F^{\varphi})_0 - \lambda id)^{-1} \| < R. \tag{9.2.10}$$

因为 $\mathrm{D}H(0) = 0$,

$$H(0) = \exp_{\varphi(x)}^{-1}(f_1 \circ \varphi(g^{-1}(x))),$$

且 $\exp_g^{-1} g = 0$,下面仍记 $\min(r, \beta)$ 为 r,并取 $0 < \alpha \leqslant \min(\theta, r)$,易证

$$\| \mathrm{D}H(v) \| < \frac{1}{2R}, \qquad \forall\, v \in V_{\varphi}(r), \tag{9.2.11}$$

$$\| H(0) \| < \frac{r}{2R}, \qquad \text{当 } P(\varphi \circ g, f_1 \circ \varphi) < \alpha. \tag{9.2.12}$$

施引理 9.2.5 于映射(9.2.9)定义的 F,利用(9.2.10)~(9.2.12),存在 $u \in V_{\varphi}(r)$,使

$$F^{\varphi}(u) = u,$$

即

$$(G \circ F \circ G^{-1})(u) = u.$$

记

$$\psi = G^{-1}(u),$$

有(9.2.3)式成立.注意到 $0 < r < \beta$ 且

$$G^{-1}: V_{\varphi}(r) \to B(\varphi, r)$$

是同胚,故 $\psi \in B(\varphi, r)$ 是唯一的,且(9.2.4)式成立. □

注 9.2.1 在定理 9.2.1 中取 $X = \mathbf{Z}$,令 $\varphi(n) = x_n$, $g(n) = n+1$, $\forall\, n \in \mathbf{Z}$,使 $\{x_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ 为 α 伪轨,则对任意 C^1 同胚 f_1,只要 f_1 和 φ 满足相应条件,必存在 f_1 的一条真轨迹

$$\mathrm{Orb}_{f_1}(\psi(0)) = \{ f_1^n(\psi(0)) = \psi(n) \mid n \in \mathbf{Z} \},$$

对其 β 跟踪,且 β_0 跟踪的真轨迹是唯一的.

作为定理 9.2.1 的特例,有

定理 9.2.2 (Anosov 伪轨跟踪定理) 设 $\Lambda \subset U$ 是 C^1 同胚 $f: U \to f(U)$ 的双曲不变集,则存在 Λ 的邻域 $U(\Lambda) \subset U$,对任给 $\beta>0$,存在 $\alpha>0$,使得对任意 α 伪轨 $\{x_n; n \in \mathbf{Z}\} \subset U(\Lambda)$,可被过某点 x 的轨道 $\mathrm{Orb}_f(x)$ 进行

β 跟踪.

注 9.2.2 在定理 9.2.2 中,如果 Λ 是局部极大的(见 § 9.5),则 $x \in \Lambda$.

利用定理 9.2.1,可以方便地证明 § 9.1 中的定理 9.1.2.

定理 9.2.3 设 $\Lambda \subset U$ 是 C^1 同胚 $f: U \to f(U)$ 的双曲不变集,则存在 Λ 的邻域 $U(\Lambda)$ 及 $\alpha_0 > 0$,使得对任意的 C^1 同胚

$$f_1: U(\Lambda) \to f_1(U(\Lambda)) \subset M,$$

满足条件

$$d_{C^1}(f_1, f) < \alpha_0$$

时,f_1 的任意闭不变集 $\Lambda_1 \subset U(\Lambda)$ 是双曲不变集.

证明 在定理 9.2.1 中置

$$X = \Lambda_1, \quad g = f_1|_{\Lambda_1}, \quad \varphi = id|_{\Lambda_1}: \Lambda_1 \to M,$$

于是,由定理 6.4.1 有

$$(\mathrm{Dexp}_{\varphi(x)}^{-1})_{f_1(\varphi(g^{-1}(x)))} = (\mathrm{Dexp}_x^{-1})_x = id.$$

按对任意的 $x \in \Lambda$ 及任意的

$$u \in C_\varphi(X, TM) = C(\Lambda_1, T_{\Lambda_1}(M)) = \Gamma^0(T_{\Lambda_1}(M)),$$

均有

$$\begin{aligned}((\mathrm{D}F^\varphi)_0 u)(x) &= (\mathrm{Dexp}_{\varphi(x)}^{-1})_{f_1(\varphi(g^{-1}(x)))} \circ (\mathrm{D}f_1)_{\varphi(g^{-1}(x))} u(g^{-1}(x)) \\ &= (\mathrm{D}f_1)_{f_1^{-1}(x)} u(f_1^{-1}(x)).\end{aligned}$$

再取 $U(\Lambda)$ 及 $\alpha_0 > 0$ 如定理 9.2.1,于是由(9.2.10)和定理 8.1.3 知 $(\mathrm{D}F^\varphi)_0$ 是双曲算子.利用双曲性的等价定义,知 Λ_1 是 f_1 的双曲不变集. □

推论 9.2.1 定理 9.2.1 中,不变集 $\psi(X)$ 的闭包是 f_1 的双曲不变集.

证明 由

$$\psi \circ g = f_1 \circ \psi$$

知 $\psi(X)$ 是 f_1 的不变集,且 $\psi(X) \subset U(\Lambda)$. □

推论 9.2.2 Anosov 微分同胚构成 $\mathrm{Diff}^1(M)$ 中的开集.

证明 取 $\Lambda_1 = M$,是 f_1 的闭不变集. □

§ 9.3 双曲不变集的结构稳定性

在 § 3.5 中,曾引入可扩映射的概念:设 (X, d) 是一度量空间,称同胚映射 $f: X \to X$ 是可扩的,如果存在常数 $\delta > 0$,使得对任意 $x, y \in X, x \neq y$,存在 $n \in \mathbf{Z}$,有

$$d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta,$$

并称 δ 是 f 的一个可扩常数.

其等价说法是，f 称为是可扩的，如果存在常数 $\delta>0$，满足

$$d(f^n(x), f^n(y)) < \delta, \forall n \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = y.$$

下面设记号 $M, U, f, \Lambda, U(\Lambda)$ 如§9.2 中定理 9.2.1 所述.

定理 9.3.1 设 $f\in C^1(U,M)$ 是从 U 到 $f(U)$ 的微分同胚，紧集 $\Lambda\subset U$ 是 f 的双曲不变集，则 $f|_\Lambda$ 是可扩的.

证明 取 $U(\Lambda)$ 如定理 9.2.1 所述. 又在该定理中，取拓扑空间 $X=\mathbf{Z}$，$g(n)=n+1$，$\varphi(n)=f^n$，$f_1=f$，并沿用其中的记号 φ, β_0 和 α_0，显然

$$d_{C_1}(f_1, f) = 0 < \alpha_0,$$

$$P(\varphi\circ g, f\circ\varphi) = 0 < \alpha,$$

满足定理 9.2.1 的条件.

设存在点 y_1 和 y_2，满足

$$\{\mathrm{Orb}_f(y_1)\cup\mathrm{Orb}_f(y_2)\}\subset U(\Lambda),$$

且对任意 $n\in\mathbf{Z}$，成立

$$d(f^n(y_1), f^n(y_2)) < \beta_0.$$

取

$$\psi_1 = \varphi: X\to U(\Lambda),\quad \varphi(0) = y_1,\quad \varphi(n) = f^n(y_1),$$

$$\psi_2: X\to U(\Lambda),\quad \psi_2(0) = y_2,\quad \psi_2(n) = f^n(y_2),$$

易知

$$\psi_j\circ g = f\circ\psi_j,\quad j = 1,2,$$

且

$$P(\varphi, \psi_1) = 0 < \alpha,$$

$$P(\varphi, \psi_2) = \sup_{n\in\mathbf{Z}} d(\varphi(n), \psi_2(n)) = \sup_{n\in\mathbf{Z}} d(f^n(y_1), f^n(y_2)) < \beta_0.$$

由定理 9.2.1 中 ψ 的唯一性，应有

$$\psi_1 = \psi_2,$$

故

$$y_1 = y_2.$$

从而 $f:\Lambda\to\Lambda$ 是一个可扩映射，对任意 $0<\delta<\delta_0$，δ 是一个可扩常数. □

定理 9.3.2 (双曲集的结构稳定性定理) 设 $f\in C^1(U,M)$ 是从 U 到 $f(U)$ 的微分同胚，$\Lambda\subset U$ 是 f 的双曲不变集，则 f 在 Λ 上是结构稳定的，即对任意的 $\beta>0$，存在 f 在 $C^1(U,M)$ 中的邻域 $\mathscr{U}_f$，使得对任意的同胚 $f_1\in\mathscr{U}_f$ 存在 f_1 的双曲不变集 $\Delta\subset U$ 和同胚 $h:\Lambda\to\Delta$，有

(1) $h\circ f|_\Lambda = f_1\circ h$.

(2) $P(h, id|_\Lambda) < \beta$.

证明 由定理 9.3.1, $f|_\Lambda$ 是可扩映射, 记 θ 为 $f: \Lambda \to \Lambda$ 的可扩常数. 任给常数 $\beta > 0$, 不妨设

$$\beta \leqslant \min\left\{\beta_0, \frac{1}{3}\theta\right\}.$$

置常数 $\alpha_0, \beta_0 > 0$, 使其意义如定理 9.2.1, 并在该定理中取

$$X = \Lambda, \quad g = f|_\Lambda: \Lambda \to \Lambda, \quad \varphi = id|_\Lambda: \Lambda \to M.$$

又利用条件

$$d_{C^1}(f, f_1) < \alpha$$

定义 $\mathcal{U}_f$, 其中 $\alpha < \alpha_0$. 于是, 当同胚 $f_1 \in \mathcal{U}_f$ 时

$$P(\varphi \circ g, f_1 \circ \varphi) = P(f|_\Lambda, f_1|_\Lambda) \leqslant d_{C^1}(f|_\Lambda, f_1) < \alpha.$$

因此, 由定理 9.2.1, 存在唯一的连续映射 $h: \Lambda \to M$, 使

$$h \circ f|_\Lambda = f_1 \circ h; \tag{9.3.1}$$

并且有结论(2)成立. 记 $\Delta = h(\Lambda)$, 于是

$$f_1(\Delta) = f_1 \circ h(\Lambda) = h \circ f(\Lambda) = h(\Lambda) = \Delta,$$

且由 Λ 的紧致性, 知 $\Delta = h(\Lambda)$ 是闭集, 即是 f_1 的闭不变集, 由定理 9.2.3 知 Δ 是 f_1 的双曲不变集. 下面, 证

$$h: \Lambda \to \Delta$$

是同胚. 由于 $X = \Lambda$ 是紧空间, 由引理 3.1.1, 只需证连续映射 h 是单射.

若其不然, 存在 $x, y \in \Lambda$, $h(x) = h(y)$ 但 $x \neq y$. 由 $f|_\Lambda$ 的可扩性, 存在 $n \in \mathbf{Z}$ 使

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \theta.$$

再由前证结论(2), 有

$$\begin{aligned}
0 &= d(f_1^n(h(x)), f_1^n(h(y))) \\
&= d(h(f^n(x)), h(f^n(y))) \\
&\geqslant d(f^n(x), f^n(y)) - d(f^n(x), h(f^n(x))) - d(h(f^n(y)), f^n(y)) \\
&> \theta - \beta - \beta \\
&\geqslant \frac{1}{3}\theta > 0,
\end{aligned}$$

而导致矛盾, 故 $x = y$, 即 h 是连续单射, 从而是同胚. 故结论成立. □

定理 9.3.3 Anosov 微分同胚是结构稳定的.

证明 在定理 9.3.2 中取 $\Lambda = M$. 由推论 9.2.2, Anosov 微分同胚构成 $\mathrm{Diff}^1(M)$ 中的开集, 故当 $\alpha > 0$ 充分小时, $f_1 \in \mathcal{U}_f$ 是 Anosov 微分同胚, 从而 f_1 的双曲不变集

$$h(\Lambda) = \Delta = M,$$

即 $h:\Lambda\to M$ 是满射，从而结论成立. □

§9.4　双曲不变集的稳定流形定理

本节主要讨论两个问题，一个是双曲不变集的局部稳定(非稳定)流形，另一个是稳定流形与不稳定流形的横截相交. 为第一个问题的需要，还首先讨论嵌入圆盘族的概念.

设 M 是一光滑的 Riemann 流形，紧致集 $\Lambda\subset M$ 是 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)(r\geqslant 1)$ 的双曲不变集. 如定义 9.1.1，限制于 Λ 上的切丛 $T_\Lambda M$ 有 Whitney 和分解

$$E=T_\Lambda M=E^s\oplus E^u.$$

对 M 上的 Riemann 度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 导出的范数 $|\cdot|$，可以在切丛 E 上引入与之等价的范数

$$\|\xi\|=\max\{|\xi_s|,|\xi_u|\},$$

其中 $\xi=\xi_s+\xi_u\in E,\xi_s\in E^s,\xi_u\in E^u$.

考虑切丛 $(T_\Lambda M,\pi,\Lambda,\mathbf{R}^m)$ 上的截面 $\sigma:\Lambda\to T_\Lambda M$，即 Λ 上满足

$$\pi\circ\sigma=id$$

的一个向量场，其中丛投影 $\pi:T_\Lambda M\to\Lambda$ 满足 $\pi:T_xM\to x$. 记全体有界截面的集合 $\Gamma^b(\Lambda,T_\Lambda M)$ 为 $\Gamma^b(E)$，并引入最大模范而成为 Banach 空间，其相应于 E 的分解，有

$$\Gamma^b(E)=\Gamma^b(E^s)\oplus\Gamma^b(E^u);$$

类似地，记连续截面空间为 $\Gamma^0(E)$.

对于常数 $\alpha>0$，记

$$E(\alpha)=\{\xi\in E\mid\|\xi\|\leqslant\alpha\},$$
$$\Gamma^b(E(\alpha))=\{\sigma\in\Gamma^b(E)\mid\|\sigma\|\leqslant\alpha\};$$

类似可定义 $E^s(\alpha),E^u(\alpha),\Gamma^b(E^s(\alpha)),\Gamma^b(E^u(\alpha))$ 以及 $\Gamma^0(E^s(\alpha))$ 和 $\Gamma^0(E^u(\alpha))$.

首先讨论 C^r 嵌入圆盘，并指出 $E_x^s(E_x=T_xM=E_x^s\oplus E_x^u,x\in\Lambda)$ 是某个嵌入圆盘的切空间. 设 $k\in\mathbf{N}$，称

$$D^k=\left\{u=(u_1,\cdots,u_k)\in\mathbf{R}^k\mid\sum_{j=1}^k u_j^2<1\right\}$$

为 $\mathbf{R}^k$ 中的 k 维圆盘，并用 $E_mb^r(D^k,M)$ 表示从圆盘 D^k 到 M 的所有 C^r 嵌入组成的空间. $E_mb^r(D^k,M)$ 是 $C^r(D^k,M)$ 中的开子集.

定义 9.4.1　称 $\{D_x\mid x\in\Lambda\}$ 为 C^r 嵌入圆盘连续族，若对任意的 $x\in\Lambda$，存在 x 的邻域 $U(x)$ 和连续映射 $\theta:U(x)\to E_mb^r(D^k,M)$，使得

$$\theta(y)(D^k) = D_y, \quad \theta(y)(0) = y, \quad \forall y \in U(x).$$

显然,D_y 是 $\theta(y)$ 映圆盘 D^k 入 M 中的像.

在紧集 Λ 上,存在 $\alpha>0$,使得对任意的 $x\in\Lambda$,指数映射

$$\exp_x : \{\xi \in T_xM \mid \|\xi\| < \alpha\} \to M$$

是到像集的微分同胚.于是,对于适当小的 $0<\beta<\alpha$,定义映射 $F:E(\beta)\to E$ 和 $\widetilde{F}:\Gamma^b(E(\beta))\to\Gamma^b(E)$ 分别为

$$F(\xi) = \exp^{-1}_{(f\circ\pi)(\xi)} \circ f \circ \exp_{\pi(\xi)}(\xi), \quad \forall \xi \in E(\beta),$$

$$\widetilde{F}(\sigma) = F \circ \sigma \circ f^{-1}, \quad \forall \sigma \in \Gamma^b(E(\beta)).$$

在后面的论述中,有时还限制 $\widetilde{F}$ 为 $\Gamma^0(E(\beta))$ 到 $\Gamma^0(E)$ 的映射.这里,对 $\widetilde{F}$ 给出如下性质.

命题 9.4.1　零截面 $0\in\Gamma^b(E(\beta))$ 是 $\widetilde{F}$ 的双曲不动点.

证明　由 Palais 引理(§6.5),有

$$d\widetilde{F}(0)\tau = (\tilde{d}F)_{0\circ f^{-1}} \circ \tau \circ f^{-1} = (df) \circ \tau \circ f^{-1}.$$

再由 f 的双曲性和命题 9.1.1,对 $\xi\in\Gamma^b(E^s)$ 和 $\sigma\in\Gamma^b(E^u)$ 分别成立

$$\begin{aligned}\|d\widetilde{F}(0)\xi\| &= \sup_{x\in\Lambda}\|((df)\circ\xi\circ f^{-1})(x)\| \\ &\leqslant \tau \sup_{y\in\Lambda}\|\xi(y)\| = \tau\|\xi\|\end{aligned}$$

和

$$\|d\widetilde{F}(0)\sigma\| \geqslant \tau^{-1}\sup_{y\in\Lambda}\|\sigma(y)\| = \tau^{-1}\|\sigma\|,$$

其中 τ 是命题 9.1.1 中的常数,由此可知结论成立.　□

如果有 $g:\Gamma^b(E^s(\beta))\to\Gamma^b(E^u(\beta))$,则记 $(id,g)\Gamma^b(E^s(\beta))$ 为 $G(g)$.

命题 9.4.2　对于充分小的实数 $0<\beta<\alpha$,存在 C^r 映射 $g_b:\Gamma^b(E^s(\beta))\to\Gamma^b(E^u(\beta))$,满足

(1) $(dg_b)_0=0$,且 $\|g_b(\sigma_1)\|\leqslant\|\sigma_1\|$,　$\forall\sigma_1\in\Gamma^b(E^s(\beta))$.

(2) $\sigma\in G(g_b)\Leftrightarrow\|\widetilde{F}^n(\sigma)\|\leqslant\beta$,　$n=0,1,2,\cdots$.

(3) $\sigma\in G(g_b)\Rightarrow\|\widetilde{F}(\sigma)\|\leqslant\lambda\|\sigma\|$,　$\exists\,0<\lambda<1$.

证明　由定理 8.5.1(双曲不动点稳定流形定理),$G(g_b)$ 是 $\widetilde{F}$ 在零截面 0 处的局部稳定流形,从而可证上述结论成立.　□

命题 9.4.3　$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)\in G(g_b)$ 的充分必要条件是

$$\sup_{x\in\Lambda}\|F^n(\sigma_1(x),\sigma_2(x))\| \leqslant \beta, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

并且对任意的 $\sigma_1\in\Gamma^b(E^s(\beta))$,使上式成立的 σ_2 是唯一的,此时 $\sigma_2=g_b(\sigma_1)$.

证明　对任一 $x\in\Lambda$,归纳可证

$$\begin{aligned}F^n(\sigma_1(x),\sigma_2(x)) &= (F^n\circ(\sigma_1,\sigma_2)\circ f^{-n})(f^n(x)) \\ &= \widetilde{F}^n(\sigma_1,\sigma_2)(f^n(x)),\end{aligned}$$

于是,

$$\sup_{x\in\Lambda}\| F^n(\sigma_1(x),\sigma_2(x))\| = \|\widetilde{F}(\sigma_1,\sigma_2)\|.$$

由命题 9.4.2(2)可证结论成立. □

上述命题对 $\widetilde{F}:\Gamma^0(E(\beta))\to\Gamma^0(E)$也是成立的.

为了把零截面处的局部稳定流形"降落"到切丛上,还需要引入映射 $H:E^s(\beta)\to E^u(\beta)$.

对任一 $\xi_1\in E^s(\beta)$,定义到截面上的映射 $p:E^s(\beta)\to\Gamma^b(E^s(\beta))$为

$$p(\xi_1)(x) = \begin{cases}\xi_1, & x = \pi(\xi_1),\\ 0_x, & x\neq\pi(\xi_1),\end{cases}$$

其中 0_x 是 E^s_x 中的零向量. 定义映射 $H:E^s(\beta)\to E^u(\beta)$为

$$H(\xi_1) = g_b(p(\xi_1))(\pi(\xi_1)),\quad \forall\,\xi_1\in E^s(\beta),$$

其中 C^r映射 $g_b:\Gamma^b(E^s(\beta))\to\Gamma^b(E^u(\beta))$如命题 9.4.2 所述.

在上述定义中, $p(\xi_1)\in\Gamma^b(E^s(\beta))$, 为后面证明的需要, 还应当限制 p 使其是到连续截面上的映射.

对任意 $x\in\Lambda$, 取环绕 x 点的 E^s 的局部平凡化(V,φ), V 是 x 的邻域, 使得

$$E^s|V = \varphi^{-1}(V\times\mathbf{R}^k),$$

则 φ^{-1}将 $\mathbf{R}^k$ 中的坐标基$(e_1,\cdots,e_k)$映为 $E^s|V$ 上的标架场, 通过 Gram-Schmidt 正交化过程, 得到 E^s 上关于 Riemann 度量$\langle\cdot,\cdot\rangle$正交规范的标架场

$$e_1(y),\cdots,e_k(y),\quad y\in\Lambda.$$

对任意 $\xi\in\pi^{-1}(V)$, 可设

$$\xi = \sum_{j=1}^{k}\xi_j e_j(\pi(\xi)).$$

取 x 的邻域 U, 使其闭包 $\overline{U}\subset V$, 并取连续函数 $\gamma:\Lambda\to\mathbf{R}$, 满足

(1) $0\leqslant\gamma(x)\leqslant 1,\quad\forall\,x\in\Lambda$.

(2) $\gamma|\overline{U}=1$.

(3) $\mathrm{supp}\,\gamma\subset V$.

在 $E^s(\beta)\cap\pi^{-1}(U)$上定义映射 $\tilde{p}$ 为

$$\tilde{p}(\xi)(y) = \begin{cases}\beta(y)\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\xi_j e_j(y), & y\in V,\\ 0, & y\,\overline{\in}\,V,\end{cases}$$

于是有如下引理.

引理 9.4.1 映射 $\tilde{p}:E^s(\beta)\cap\pi^{-1}(U)\to\Gamma^0(E^s(\beta))$, 且满足

(1) $\tilde{p}(\xi)(\pi\xi)=\xi$.

(2) $\| \tilde{p}(\xi) \| = \| \xi \|$.

命题 9.4.4 映射 $H: E^s(\beta) \to E^u(\beta)$ 满足

$$g_b(\sigma_1) = H \circ \sigma_1, \quad \forall \sigma_1 \in \Gamma^b(E^s(\beta)),$$

且满足上式的 H 是唯一的.

证明 任取 $\sigma_1 \in \Gamma^b(E^s(\beta))$ 和 $x \in \Lambda$, 记 $\xi_1 = \sigma_1(x)$, 则 $x = \pi(\xi_1)$. 又

$$\xi_1 = p(\xi_1)(\pi(\xi_1)) = p(\xi_1)(x).$$

再由 H 的定义, 有 $(p(\xi_1), g_b(p(\xi_1))) \in G(g_b)$, 于是由命题 9.4.3, 可得

$$\sup_{x \in \Lambda} \| F^n(\sigma_1(x), (H \circ \sigma_1)(x)) \|$$

$$= \sup_{x \in \Lambda} \| F^n(p(\xi_1)(x), g_b(p(\xi_1))(x)) \| \leqslant \beta, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

故结论成立. H 的唯一性是显然的. □

命题 9.4.5 H 是连续的; 且对任意 $x \in \Lambda$, H 限制在纤维 $E^s(\beta) \cap T_xM$ 上是 C^r 的.

证明 对于映射 $\tilde{F}: \Gamma^0(E(\beta)) \to \Gamma^0(E)$, 存在 C^r 映射 $g_0: \Gamma^0(E^s(\beta)) \to \Gamma^0(E^u(\beta))$, 记 $G(g_0) = (id, g_0)\Gamma^0(E^s(\beta))$, 有类似于命题 9.4.2 和命题 9.4.3 的结论成立.

对任一 $\xi_1 \in E^s(\beta)$, 存在 $x \in \Lambda$, 使 $x = \pi(\xi_1)$. 取 x 的邻域 U 如上, 使 $\xi_1 \in E^s(\beta) \cap \pi^{-1}(U)$, 从而

$$(\tilde{p}(\xi_1), g_0(\tilde{p}(\xi_1))) \in G(g_0).$$

于是, 类似于命题 9.4.3, 有

$$\begin{aligned} &\| F^n(\xi_1, g_0(\tilde{p}(\xi_1))(\pi\xi_1)) \| \\ &= \| F^n(\tilde{p}(\xi_1)(\pi\xi_1), g_0(\tilde{p}(\xi_1))(\pi\xi_1)) \| \\ &\leqslant \rho, \quad n = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

再由该命题中的唯一性, 又有

$$\begin{aligned} g_0(\tilde{p}(\xi_1))(\pi\xi_1) &= g_b(\xi_1) \\ &= g_b(p(\xi_1))(\pi\xi_1) \\ &= H(\xi_1), \quad \forall \xi_1 \in E^s(\beta). \end{aligned}$$

由引理 9.4.1, $\tilde{p}$ 和 $\tilde{p}(\xi_1)$ 分别是连续映射和连续截面, 于是 $g_0(\tilde{p}(\xi_1))$ 是连续截面且连续地依赖于 ξ_1, 故 H 在 $E^s(\beta) \cap \pi^{-1}(U)$ 上, 从而在 $E^s(\beta)$ 上连续. 类似可证后一结论. □

命题 9.4.6 对任意固定的 $x \in \Lambda$, 映射 $(id, H): E^s(\beta) \cap T_xM \to G(H) \subset E(\beta)$ 是 C^r 嵌入.

证明 由命题 9.4.5, H 在纤维 $E^s(\beta) \cap T_xM$ 上是 C^r 映射. 设 $\pi_1: E^s(\beta) \times E^u(\beta) \to E^s(\beta)$ 是投影, 记 $G(H) = (id, H)E^s(\beta)$, 则 $\pi_1 | G(H)$ 是 (id, H)

的逆映射,故结论成立. □

定理 9.4.1 设 M 是一光滑的 Riemann 流形,紧致集 $\Lambda\subset M$ 是 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 的双曲不变集,则存在 C^r 嵌入圆盘的连续族 $\{D_x^s \mid x\in\Lambda\}$ 和常数 $\kappa>0$,$0<\lambda<1$,满足

(1) $T_xD_x^s=E_x^s$, $\forall\, x\in\Lambda$.

(2) 对任意的 $y\in D_x^s$,有

$$d(f^n(y),f^n(x))\leqslant \kappa\lambda^n d(y,x),\quad n=1,2,\cdots$$

证明 (证(1)) 对任一 $x\in\Lambda$,设 V 是 E^s 上环绕 x 的局部平凡化领域,如前所述. 记 $IE^s(\beta)$ 为 $E^s(\beta)$ 的内部. 定义 $\psi: V\times D^k\to IE^s(\beta)$ 为

$$\psi(y,u)=\beta\sum_{j=1}^{k}u_je_j(y),\quad (y,u)\in V\times D^k,$$

其中 $e_1(y),\cdots,e_k(y)$ 是 E^s 上的正交规范标架场. 又置

$$\theta(y)(u)=\exp_y\circ(id,H)\circ\psi(y,u).$$

$\exp_y$ 和 ψ 是光滑同胚,于是由命题 9.4.6,对固定的 y, $\theta(y): D^k\to M$ 是 C^r 嵌入. 显然

$$\theta: V\to E_mb^r(D^k,M)$$

是连续映射.

记

$$D_y^s=(\exp_y\circ(id,H))(IE^s(\beta)),\tag{9.4.1}$$

显然,对 $y\in V$,有

$$\theta(y)(D^k)=\exp_y\circ(id,H)(IE^s(\beta))=D_y^s,$$

$$\theta(y)(0)=\exp_y 0=y,\quad \forall\, y\in V.$$

故由定义 9.4.1,知 $\{D_x^s \mid x\in\Lambda\}$ 是 C^r 嵌入圆盘连续族.

对于 $\xi_1\in E_x^s(\beta)$, $\pi(\xi_1)=x$,由

$$\frac{\| H(\xi_1)-H(0_x)\|}{\|\xi_1\|}=\frac{\| g_b(p(\xi_1))(x)-g_b(0)x\|}{\| p(\xi_1)\|}$$

$$\leqslant\frac{\| g_b(p(\xi_1))-g_b(0)\|}{\| p(\xi_1)\|},$$

及 $\mathrm{d}g_b(0)=0$(命题 9.4.2),可证

$$\tilde{\mathrm{d}}H(0_x)=0,\quad \forall\, x\in\Lambda.$$

于是

$$(\mathrm{d}(id,H))_0=(id,0).$$

再由定理 6.4.1,有

$$(\mathrm{d}\exp_x)_0=id,$$

故
$$T_xD_x^s = (\mathrm{dexp}_x)_0(\mathrm{d}(id,H))_0(E_x^s) = E_x^s, \quad \forall x \in \Lambda,$$
即结论(1)成立.

(证(2)) 设 $\xi=(\xi_1,H(\xi_1))\in G(H)$,下面先给出对 $|F^n(\xi)|$ 的估计.由 $\xi_1\in E^s(\beta)$, $x=\pi(\xi_1)$,及映射 p 的定义,有 $p(\xi_1)\in\Gamma^b(E^s(\beta))$及
$$\xi_1 = p(\xi_1)(x).$$
于是,由命题 9.4.2 有
$$\begin{aligned}\| F(\xi) \| &= \| F(\xi_1,H(\xi_1)) \| \\ &= \| F(p(\xi_1)(x),g_b(p(\xi_1))(x)) \| \\ &= \| \widetilde{F}(p(\xi_1),g_b(p(\xi_1)))(f(x)) \| \\ &\leqslant \| \widetilde{F}(p(\xi_1),g_b(p(\xi_1))) \| \\ &\leqslant \lambda \| (p(\xi_1),g_b(p(\xi_1))) \| \\ &= \lambda\max\{|p(\xi_1)|,|g_b(p(\xi_1))|\} \\ &= \lambda|p(\xi_1)|.\end{aligned}$$
由于 $|p(\xi_1)|=|\xi_1|$,故上式即
$$\| F(\xi) \| \leqslant \lambda|\xi_1| \leqslant \lambda \| \xi \| . \tag{9.4.2}$$
再由范数 $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$ 的等价性,存在常数 $0<c_1<c_2$,使得
$$c_1 \| \xi \| \leqslant |\xi| \leqslant c_2 \| \xi \|, \quad \forall \xi \in E, \tag{9.4.3}$$
记 $\kappa=c_2/c_1$,从而由(9.4.2)逆归可证
$$|F^n(\xi)| \leqslant c_2 \| F^n(\xi) \| \leqslant \kappa\lambda^n|\xi|, \quad n = 1,2,\cdots \tag{9.4.4}$$
设 $y\in D_x^s$,有 $\exp_x^{-1}y\in G(H)$,并且由
$$F(\exp_x^{-1}y) = \exp_{f(x)}^{-1}f(y),$$
归纳可证
$$F^n(\exp_x^{-1}y) = \exp_{f^n(x)}^{-1}f^n(y),$$
其中 $f^n(x), f^n(y)\in M$.于是,由定理 6.4.2 及式由(9.4.4),有
$$\begin{aligned}d(f^n(y),f^n(x)) &= |\exp_{f^n(x)}^{-1}f^n(y)| \\ &= |F^n(\exp_x^{-1}y)| \\ &\leqslant \kappa\lambda^n|\exp_x^{-1}y| \\ &= \kappa\lambda^n d(y,x), \quad n = 1,2,\cdots\end{aligned}$$
对 $y\in D_x^s$ 成立. □

设 D_x^s 定义如(9.4.1),对 $\varepsilon>0$,记
$$O(x,\varepsilon) = \{y \in M | d(x,y) < \varepsilon\},$$

由定理 9.4.1, $D_x^s \cap O(x,\varepsilon)$ 是 C^r 嵌入子流形.

定义 9.4.2 对 $x \in M$, 称 C^r 嵌入子流形 $D_x^s \cap O(x,\varepsilon)$ 为 f 在 x 点的局部稳定流形, 记为 $W_\varepsilon^s(x,f) = D_x^s \cap O(x,\varepsilon)$.

下面的讨论, 将进一步给出 $W_\varepsilon^s(x,f)$ 的性质.

引理 9.4.2 任给 $0<\eta<1/2$, 存在 $0<\varepsilon<\beta$, 当 $\xi = (\xi_1, H(\xi_1)) \in G(H)$, $|\xi|<\varepsilon$ 时, 有

$$(1-\eta)\|\xi\| \leqslant |\xi| \leqslant (1+\eta)\|\xi\|. \tag{9.4.5}$$

证明 首先, 由命题 9.4.2(1), 有

$$\begin{aligned} |H(\xi_1)| &= |g_b(p(\xi_1))(\pi(\xi_1))| \\ &\leqslant |g_b(p(\xi_1))| \leqslant |p(\xi_1)| = |\xi_1|, \end{aligned} \tag{9.4.6}$$

故

$$\|\xi\| = \max\{|\xi_1|, |H(\xi_1)|\} = |\xi_1| \geqslant |H(\xi_1)|. \tag{9.4.7}$$

再由 $g_b(0)=0, (\mathrm{d}g_b)_\theta = 0$, 存在 $0<\delta<\beta$, 当 $\sigma \in \Gamma^b(E^s(\beta))$ 且 $|\sigma|<\delta$ 时, 有

$$|g_b(\sigma)| \leqslant \eta|\sigma|.$$

于是, 当 $\xi \in G(H)$ 且 $\|\xi\| = |\xi_1| < \delta$ 时, 可加强(9.4.6)式为

$$|H(\xi_1)| \leqslant \eta|\xi_1|,$$

并由此可得

$$(1-\eta)|\xi_1| \leqslant |\xi_1 + H(\xi_1)| \leqslant (1+\eta)|\xi_1|,$$

由(9.4.7)有(9.4.5)式对 $\|\xi\|<\delta$ 成立.

特别取 $\varepsilon = \min\{c_1\delta, \delta\}$, 实数 $c_1>0$ 如(9.4.3), 易知 $|\xi|<\varepsilon$ 时满足条件

$$\|\xi\| \leqslant \frac{1}{c_1}|\xi| < \frac{1}{c_1}\varepsilon < \delta,$$

故(9.4.5)对 $|\xi|<\varepsilon$ 时成立. □

引理 9.4.3 $\xi \in G(H)$ 的充分必要条件是

$$\|F^n(\xi)\| \leqslant \beta, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

证明 只证充分性. 设 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\xi_1 \in E^s(\beta)$, 由

$$\begin{aligned} &\|F^n(p(\xi_1)(\pi(\xi_1)), \xi_2)\| \\ &= \|F^n(\xi_1, \xi_2)\| \leqslant \beta, \quad n = 0,1,2,\cdots \end{aligned}$$

有 $\xi_2 = g_b(p(\xi_1))(\pi(\xi_1)) = H(\xi_1)$, 即 $\xi \in G(H)$. □

定理 9.4.2 (稳定流形定理) 在定理 9.4.1 的条件下, 对 $x \in \Lambda$, 存在常数 $0<\lambda<\mu<1, 0<\varepsilon$, 满足

(1) $d(f(x), f(y)) \leqslant \mu d(x,y)$, $\forall y \in W_\varepsilon^s(x,f)$.

(2) $W_\varepsilon^s(x,f) = \{y \in M \mid d(f^n(y), f^n(x)) < \varepsilon, n \in \mathbf{Z}_+\}$.

证明　(证(1))　取 $0<\eta<1/2$,使得

$$0<\mu=\frac{1+\eta}{1-\eta}\lambda<1,$$

并取 $\varepsilon>0$ 如引理 9.4.2. 对 $x\in\Lambda$ 和 $\xi\in G(H)\cap\{\xi\in T_xM\mid|\xi|<\varepsilon\}$,由(9.4.2)和引理 9.4.1,有

$$\|F(\xi)\|\leqslant\lambda\|\xi\|\leqslant\frac{\lambda}{1-\eta}|\xi|<\varepsilon<\delta.$$

从而可利用(9.4.5)及上式得

$$|F(\xi)|\leqslant(1+\eta)\|F(\xi)\|\leqslant\mu|\xi|<\varepsilon. \tag{9.4.8}$$

如果 $y\in W_\varepsilon^s(x,f)=D_x^s\cap O(x,\varepsilon)$,那么由

$$|\exp_x^{-1}y|=|d(y,x)|<\varepsilon,$$

有

$$\exp_x^{-1}y\in G(H)\cap\{\xi\in T_xM\mid|\xi|<\varepsilon\},$$

可利用(9.4.8)得

$$\begin{aligned}d(f(y),f(x))&=|\exp_{f(x)}^{-1}f(y)|=|F(\exp_x^{-1}y)|\\&\leqslant\mu|\exp_x^{-1}y|=\mu d(y,x),\end{aligned}$$

即结论(1)成立.

(证(2))　由结论(1),有

$$d(f^n(y),f^n(x))\leqslant\mu^n d(y,x)<\varepsilon,\quad n=0,1,\cdots \tag{9.4.9}$$

即

$$W_\varepsilon^s(x,f)\subset\{y\in M\mid d(f^n(y),f^n(x))<\varepsilon,\quad n=0,1,2,\cdots\}. \tag{9.4.10}$$

另一方面,设 $y\in M$ 使

$$d(f^n(y),f^n(x))<\varepsilon<\beta,\quad n=0,1,2,\cdots$$

显然,$|\exp_x^{-1}y|=d(y,x)<\varepsilon$,并且

$$\begin{aligned}|F^n(\exp_x^{-1}y)|&=|\exp_{f^n(x)}^{-1}f^n(y)|\\&=d(f^n(y),f^n(x))<\varepsilon\leqslant\beta,\quad n=0,1,\cdots\end{aligned}$$

从而由引理 9.4.3,有

$$\exp_x^{-1}y\in G(H)\cap\{\xi\in T_xM\mid|\xi|<\varepsilon\},$$

即

$$y\in D_x^s\cap O(x,\varepsilon)=W_\varepsilon^s(x,f).$$

联合(9.4.10)知结论(2)成立. □

定理 9.4.1 和 9.4.2,总称为(局部)稳定流形定理. 尤其是定理 9.4.2 的结论(2)可作为局部稳定流形的定义. 可类似地给出不稳定流形定理.

定理 9.4.3 在定理 9.4.1 的条件下,存在 C^r嵌入圆盘的连续族$\{D_x^u|x\in\Lambda\}$和常数 $\kappa>0,0<\lambda<1$,满足

(1) $T_xD_x^u=E_x^u,\quad \forall x\in\Lambda$.

(2)对任意的 $y\in D_x^u$,有

$$d(f^{-n}(y),f^{-n}(x))\leqslant\kappa\lambda^n d(y,x),\quad n=1,2,\cdots \qquad \square$$

定义 9.4.3 对 $x\in M$,称嵌入子流形 $D_x^u\cap O(x,\varepsilon)$为 f 在 x 点的局部不稳定流形,记为 $W_\varepsilon^u(x,f)=D_x^u\cap O(x,\varepsilon)$.

定理 9.4.4 (不稳定流形定理) 在定理 9.4.1 的条件下,对 $x\in\Lambda$,存在常数 $0<\lambda<\mu<1,0<\varepsilon$,满足

(1) $d(f^{-1}(y),f^{-1}(x))\leqslant\mu d(y,x),\quad \forall y\in W_\varepsilon^u(x,f)$.

(2) $W_\varepsilon^u(x,f)=\{y\in M|d(f^{-n}(y),f^{-n}(x))<\varepsilon,n\in\mathbf{Z}_+\}$.

还可以定义全局稳定流形和不稳定流形.

定义 9.4.4 对 $x\in M$,分别称

$$W^s(x,f)=\{y\in M|\lim_{k\to\infty}d(f^k(y),f^k(x))=0\}$$

和

$$W^u(x,f)=\{y\in M|\lim_{k\to\infty}d(f^{-k}(y),f^{-k}(x))=0\},$$

为 f 在点 x 的全局稳定流形和不稳定流形.

显然,有如下结论.

命题 9.4.7 对任给的 $\varepsilon>0$,有

(1) $W^u(x,f)=W^s(x,f^{-1})$.

(2) $W_\varepsilon^u(x,f)=W_\varepsilon^s(x,f^{-1})$.

(3) $W^s(x,f)=\bigcup_{j\geqslant0}f^{-j}W_\varepsilon^s(f^j(x),f)$.

(4) $W_\varepsilon^s(x,f)=W^s(x,f)\cap[\bigcap_{j\geqslant0}f^{-j}(O(f^j(x),\varepsilon))]$.

一般而言,$W^s(x,f)$和 $W^u(x,f)$可能是非连通集,并且只是浸入子流形,而不是嵌入子流形.

有时简记 $W^s(x,f)$为 $W^s(x)$,其余类似.

例 9.4.1 考虑由 $A:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 诱导出的环面双曲自同构 $f:T^2\to T^2$.对任意的 $x\in T^2$,取 $y\in\mathbf{R}^2$,使 $\pi(y)=x$,则 $W^s(x)$是过 y 的平行于A 的压缩方向的直线$L_s=E_x^s$ 在 T^2 上的投影,而 $W^u(x)$是过 y 的平行于A 的扩张方向的直线$L_u=E_x^u$ 在 T^2 上的投影.

从上例可以简略地看出,任给 $x\in\Lambda$,对适当小的 $\varepsilon>0$, $W_\varepsilon^s(x,f)$有如与 E_x^s 相切的k 维圆盘,其中 $k=\dim E_x^s$;而 $W_\varepsilon^u(x,f)$有如与 E_x^u 相切的 l 维圆盘,其中 $l=\dim E_x^u$.

下面讨论本节的第二个问题,即稳定流形与不稳定流形的横截相交性.

定义 9.4.5　设 $N, L \subset M$ 是 M 的两个 $C^r(r\geqslant 1)$ 子流形，点 $x\in M$，称子流形 N 和 L 横截相交于点 x，如果 $x\in N\cap L$，且 $T_xN\oplus T_xL = T_xM$，记为 $N \pitchfork_x L$;当 $N\cap L=\varnothing$时,亦称 N 和 L 横截相交.

显然,由定理 9.4.1 和 9.4.3 有 $W^u_\varepsilon(x,f) \pitchfork_x W^s_\varepsilon(x,f)$. 下面的讨论将指出,对充分接近的 y 和 $z\in\Lambda$, $W^u_\varepsilon(y,f)$和 $W^s_\varepsilon(z,f)$也有唯一的横截交点,记为 $r(y,z)$.

引理 9.4.4　在定理9.4.1的条件下,对$x\in\Lambda$,存在常数$0<\varepsilon(x)<\zeta(x)$,当 y、$z\in\Lambda\cap O(x,\varepsilon(x))$时,存在唯一的 $r(y,z)\in O(x,\zeta(x))$便得

$$D^u_y \pitchfork_{r(y,z)} D^s_z,$$

且 $r(y,z)$连续地依赖于 y 和 z.

证明　由定理 9.4.1 和 9.4.3,对 $x\in\Lambda$,存在 C^r嵌入圆盘族$\{D^s_x|x\in\Lambda\}$和$\{D^u_x|x\in\Lambda\}$,使 $D^u_x \pitchfork_x D^s_x$,以及连续映射 $\theta^s: U(x)\to E_mb^r(D^k,M)$和 $\theta^u: U(x)\to E_mb^r(D^l,M)$, $k+l=m=\dim M$,对所有的 $y\in U(x)$满足

$$\theta^s(y)(D^k) = D^s_y,\quad \theta^s(y)(0) = y;$$

$$\theta^u(y)(D^l) = D^u_y,\quad \theta^u(y)(0) = y.$$

取参变量 $\alpha,\beta\in\Lambda$,定义映射 $\psi_{\alpha\beta}: D^k\times D^l\to\mathbf{R}^m$ 为

$$\psi_{\alpha\beta}(a,b) = \theta^u(\alpha)(a) - \theta^s(\beta)(b),\quad (a,b)\in D^k\times D^l.$$

显然

$$\psi_{xx}(0,0) = 0,$$

且适用隐函数定理. 于是,存在常数$0<\varepsilon(x)<\zeta(x)$,当$\alpha,\beta\in\Lambda\cap O(x,\varepsilon(x))$时,在 $D^k\times D^l$ 的充分小的邻域内存在唯一的$(a(\alpha,\beta),b(\alpha,\beta))$满足

$$\psi_{\alpha\beta}(a(\alpha,\beta),b(\alpha,\beta)) = 0,$$

故存在 $r(\alpha,\beta)\in O(x,\zeta(x))$连续依赖于 α 和β,并且有

$$\theta^u(\alpha)(a(\alpha,\beta)) = \theta^s(\beta)(b(\alpha,\beta)) = r(\alpha,\beta).$$

特别取 $\alpha=y,\beta=z$,有

$$r(y,z)\in D^u_y\cap D^s_z.$$

可核验 $r(y,z)$满足要求.　□

引理 9.4.5　设$\{G_\alpha|\alpha\in A\}$是列紧度量空间的一个开覆盖,则存在正数$\lambda>0$,当 X 的子集 U 的直径$<\lambda$ 时,存在 G_α 使 $U\subset G_\alpha$. 称 λ 为开覆盖$\{G_\alpha\}$的一个 Lebesgue 数.

证明　见文献[52]第 21 页.　□

定理 9.4.5　在定理 9.4.1 的条件下,存在充分小的正数$0<\delta<\varepsilon$,当 y, $z\in\Lambda$ 且$d(y,z)<\delta$ 时,存在唯一的点 $r(y,z)$使得

$$W^u_\varepsilon(y,f)\ \pitchfork_{r(y,z)} W^s_\varepsilon(z,f),$$

并且 $r(y,z)$连续地依赖于 y 和 z.

证明　任取$x\in\Lambda$,由引理9.4.4,存在$0<\varepsilon(x)<\zeta(x)$,当$y,z\in\Lambda\cap O(x,\varepsilon(x))$时,存在唯一的点 $r(y,z)\in O(x,\zeta(x))$连续依赖于 y 和 z,使得 $r(y,z)\in D^u_y\cap D^s_z$,并且

$$T_{r(y,z)}D^u_y\oplus T_{r(y,z)}D^s_z = T_{r(y,z)}M.$$

注意到$W^u_\varepsilon(y,f)=D^u_y\cap O(y,\varepsilon)$和$W^s_\varepsilon(z,f)=D^s_z\cap O(z,\varepsilon)$,故只须证$W^u_\varepsilon(y,f)\cap W^s_\varepsilon(z,f)$中只有唯一的交点 $r(y,z)$,即有定理的结论.

设 $\varepsilon>0$, 是 Λ 的开覆盖$\{O(x,\varepsilon(x))\mid x\in\Lambda\}$的一个 Lebesgue 数. 对任意$x\in\Lambda$,由$r(y,z)$对$y$和$z$的连续依赖性,存在$\eta(x)\leqslant\varepsilon/2$,使得$y,z\in O(x,\eta(x))$时,有

$$d(r(y,z),x)<\varepsilon/2. \tag{9.4.11}$$

对如上 $\eta(x)$,取 Λ 的开覆盖$\{O(x,\eta(x))\mid x\in\Lambda\}$,设 $\eta>0$ 是其 Labesgue 数. 置

$$\delta=\min\{\eta,\varepsilon\}.$$

由引理 9.4.5,当$\{y,z\}\subset\Lambda$ 且$d(y,z)<\delta$ 时,存在 $O(x,\eta(x))$,使得$y,z\in O(x,\eta(x))$,从而(9.4.11)成立. 于是

$$d(r(y,z),y)\leqslant d(r(y,z),x)+d(x,y)<\varepsilon,$$
$$d(r(y,z),z)\leqslant d(r(y,z),x)+d(x,z)<\varepsilon,$$

即

$$r(y,z)\in(D^u_y\cap O(y,\varepsilon))\cap(D^s_z\cap O(z,\varepsilon))$$

或

$$r(y,z)\in W^u_\varepsilon(y,f)\cap W^s_\varepsilon(z,f).$$

并且由 $D^u_y\cap D^s_z$ 中交点的唯一性,知上式中的交点是唯一的,故结论成立. □

§9.5　极大双曲集与局部乘积结构

设 M 是光滑的 Riemann 流形, $U\subset M$ 是开集, $f\in C^1(U,M)$是从 U 到 $f(U)$的同胚,并以紧集 $\Lambda\subset U$ 为其双曲不变集.

定义 9.5.1　微分同胚 $f:U\to f(U)$的双曲不变集 $\Lambda\subset U$ 称为局部极大的,若存在 Λ 的紧邻域$V\subset U$,使得 V 中 f 的任意不变集$\Lambda'\supset\Lambda$ 有$\Lambda'=\Lambda$.

例 9.5.1　在定义 9.5.1 的条件下,置

$$\Delta=\bigcap_{n\in\mathbf{Z}}f^n(V)\subset V,$$

则 Δ 是f 在V 中的极大的不变集,因而也是 f 在 V 中的极大双曲不变集.

定义 9.5.2　微分同胚 $f:U\to f(U)\subset M$ 的双曲不变集 Λ 称为具有局部乘积结构,若存在 $\delta>0$,使得当 $y,z\in\Lambda$, $d(y,z)<\delta$ 时,有

$$r(y,z)\in\Lambda,$$

其中 $r(y,z)$是 $W_\varepsilon^u(y,f)$与 $W_\varepsilon^s(z,f)$的横截交点;这时,也称 f 在 Λ 上具有局部乘积结构.

注 9.5.1　由定理 9.4.5,可保证 $r(y,z)$的唯一存在性.

例 9.5.2　紧致光滑 Riemann 流形 M 上的 Anosov 微分同胚 f 在 M 上具有局部乘积结构.

注 9.5.2　在研究 Ω 稳定性中,局部乘积结构是一重要的概念[114],而在文献[115]中,证明了双曲不变集的局部极大性等价于局部乘积结构.

下面给出这一结论.

用 d_s 和 d_u 分别表示 $W^s(x)$和 $W^u(x)$上的距离.下设 $\varepsilon>0$ 同于稳定流形定理.

引理 9.5.1　任给 $\delta>0$,存在 $\varepsilon_1(\delta)>0$,使得对任意 $x\in\Lambda$,当 $x_1,x_2\in W_\varepsilon^\alpha(x)$且 $d(x_1,x_2)<\varepsilon_1$ 时,有

$$d(x_1,x_2)\leqslant d_\alpha(x_1,x_2)<(1+\delta)d(x_1,x_2),\quad \alpha\in\{u,s\}.$$

证明　不等式的左端是显然的;又由于 $T_xW_\varepsilon^s(x)=E^s$, $W_\varepsilon^s(x)$连续地依赖于 x 且 Λ 是紧致的,故易证不等式的右端.　□

引理 9.5.2　存在 $\beta>0$, $0<\mu<1$ 当 $x\in\Lambda$ 时,成立

$$d_s(f(x_1),f(x_2))<\mu d_s(x_1,x_2),\quad \forall x_1,x_2\in W_\beta^s(x)$$

证明　由稳定流形定理 9.4.2,存在 $0<\lambda<1$,使

$$d(f(x_1),f(x))\leqslant\lambda d(x_1,x),\quad \forall x_1\in W_\varepsilon^s(x).$$

下面,记导算子 d 为 D.再由

$$\|Df(\eta)\|\leqslant\tau\|\eta\|,\quad \forall\eta\in E^s,$$

其中 $0<\tau<1$,不妨设 $\|Df|_{E_s}\|\leqslant\lambda$,并由 f 在 Λ 上的一致连续性,易证:存在 $0<\alpha<\varepsilon$ 及 $\lambda<\lambda_1<1$ 使

$$d(f(x_1),f(x_2))<\lambda_1 d(x_1,x_2),\quad \forall x_1,x_2\in W_\alpha^s(x).\tag{9.5.1}$$

又取 $\delta>0$ 充分小,使 $\mu=(1+\delta)\lambda_1<1$.由引理 9.5.1,存在 $\varepsilon_1(\delta)>0$,对任意 $x\in\Lambda$,当 $x_1,x_2\in W_\alpha^s(x)$且 $d(x_1,x_2)<\varepsilon_1$ 时,有

$$d_s(x_1,x_2)<(1+\delta)d(x_1,x_2).\tag{9.5.2}$$

置

$$\beta=\min\left\{\alpha,\frac{1}{2}\varepsilon_1,\frac{1}{2}\right\},$$

当 $x_1,x_2\in W_\beta^s(x)\subset W_\alpha^s(x)$时,$f(x_1),f(x_2)\in W_\beta^s(f(x))$,且

$$d(f(x_1),f(x_2))\leqslant d(f(x_1),f(x))+d(f(x_2),f(x))\leqslant 2\beta<\varepsilon_1,$$

故可利用(9.5.2)、(9.5.1)及引理 9.5.1,得

$$\begin{aligned}d_s(f(x_1),f(x_2))&<(1+\delta)d(f(x_1),f(x_2))\\&<(1+\delta)\lambda_1 d(x_1,x_2)\\&\leqslant\mu d_s(x_1,x_2),\end{aligned}$$

即结论成立. □

注 9.5.3 由不稳定流形定理,有

$$d(f^{-1}(x_1),f^{-1}(x))\leqslant\lambda d(x_1,x),\quad\forall x_1\in W_\varepsilon^u(x),$$

可得到类似于引理 9.5.2 的结论

$$d_u(f^{-1}(x_1),f^{-1}(x_2))<\mu d_u(x_1,x_2),\quad\forall x_1,x_2\in W_\beta^u(x)$$

或

$$d_u(x_1,x_2)<\mu d_u(f(x_1),f(x_2)),\quad\forall f(x_1),f(x_2)\in W_\beta^u(x).$$

引理 9.5.3 设 f 的双曲不变集 Λ 具有局部乘积结构,则存在常数 δ_1, $\delta_2>0$,当 $x\in\Lambda$, $y\overline{\in}\Lambda$,但 $y\in W_{\delta_1}^u(x)$,且 $d_u(x,y)<\delta_1$ 时,存在 $N>0$ 使

$$d(f^N(y),\Lambda)>\delta_2.$$

证明 设 $\delta_1>0$ 待定,在上述记号下,记

$$a_n=\min_{z\in\Delta}d_u(f^n(y),z),\quad\Delta=\Lambda\cap W^u(f^n(x)).$$

下面给出证明的简述.

step1 引用注 9.5.3,取 β 如引理 9.5.2,当 $\delta_1<\beta$ 且 $a_{n+1}<\delta_1$ 时,存在不依赖于 x,y 和 n 的常数 μ 使得

$$a_n\leqslant\mu a_{n+1}.\tag{9.5.3}$$

step2 取 Λ 的邻域

$$U_\Lambda=\{y\in M\,|\,d(y,\Lambda)<\delta_1\},$$

则 f 在 $\overline{U}_\Lambda$ 上是 Lipschitz 的,故存在不依赖于 x,y 和 n 的常数 $\gamma>0$ 和 $k>0$,当 $a_n<\gamma$ 时,有

$$a_{n+1}\leqslant ka_n.$$

联合(9.5.3),选择 $n\geqslant0$,使

$$\delta_1/k<a_n<\delta_1.\tag{9.5.4}$$

step3 取 δ 如定义 9.5.2,又取充分小的

$$\delta_1\leqslant\min\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\delta,\beta,\gamma\right\},$$

使得当 $x_1,x_2\in\Lambda$, $x'_1\in W_{\delta_1}^u(x_1)$, $d(x'_1,x_2)\leqslant\delta_1^2$ 时,

$$d(x_1,x_2)\leqslant d(x_1,x'_1)+d(x'_1,x_2)\leqslant\delta_1+\delta_1^2<\delta,$$

由于 Λ 具局部乘积结构，故存在点 $r(x_1,x_2)$ 使

$$W^u_{2\delta_1}(x_1) \pitchfork_{r[x_1,x_2]} W^s_{2\delta_1}(x_2).$$

同时，可要求 x_1' 满足

$$d_u(x'_1, r(x_1,x_2)) < \delta_1/k. \tag{9.5.5}$$

step3　记

$$\delta_2 = \delta_1^2. \tag{9.5.6}$$

则可断言，存在 $N>0$，有

$$d(f^N(y),\Lambda) > \delta_2$$

成立．若其不然，必存在 $z\in\Lambda$ 使得

$$d(f^n(y),z) \leqslant \delta_2,\quad \forall\, n\in \mathbf{Z}_+.$$

同时，由(9.5.4)及 $y\in W^u_{\delta_1}(x)$，存在 $x'\in\Delta$ 使 $f^n(y)\in W^u_{\delta_1}(x')$．于是，类似于(9.5.5)，存在 $\gamma(x',z)\in W^u_{2\delta_1}(x')\cap W^s_{2\delta_1}(z)$满足

$$d_u(f^n(y), r(x',z)) < \delta_1/k. \tag{9.5.7}$$

另一方面，由 Λ 具局部乘积结构，有

$$r(x',z)\in\Lambda.$$

由 $r(x',z)\in W^u(x')$，有

$$r(x',z)\in W^u(f^n(x))\cap\Lambda = \Delta,$$

从而由(9.5.7)式有

$$a_n < \delta_1/k,\quad \forall\, n\in\mathbf{Z}_+,$$

与(9.5.4)矛盾，故结论成立．　□

定理 9.5.1　设紧集 $\Lambda\subset U$ 是同胚 $f:U\to f(U)\subset M$ 的双曲不变集，则 Λ 具有局部乘积结构的充分必要条件是 Λ 为局部极大双曲集．

证明　先证充分性．设 Λ 为局部极大双曲集，取 Λ 的紧致邻域 V 如定义 9.5.1 所述．再取 $\varepsilon>\delta>0$，满足定理 9.4.5 的要求，且

$$\bigcup_{x\in\Lambda}(W^u_\varepsilon(x)\cup W^s_\varepsilon(x))\subset V.$$

若 $W^u_\varepsilon(x_1)\cap W^s_\varepsilon(x_2)\neq\varnothing$，则存在唯一的 $r(x_1,x_2)\in M$ 使

$$W^u_\varepsilon(x_1) \pitchfork_{r[x_1,x_2]} W^s_\varepsilon(x_2).$$

置

$$\Lambda' = \Lambda\cup\left(\bigcup_{n\in\mathbf{Z}} f^n(r[x_1,x_2])\right)\supset\Lambda,$$

是 f 的不变集，且 $\Lambda'\subset V$．由 Λ 的极大性，有 $\Lambda'=\Lambda$，从而 $r(x_1,x_2)\in\Lambda$，故 Λ 具有局部乘积结构．

再证必要性，下面给出证明的简述．

设 Λ 具有局部乘积结构，取 ε_1 和 δ_1,δ_2 分别如引理 9.5.1 和引理 9.5.3

所述.置

$$U_{\delta_2/2}(\Lambda) = \{y \in M \mid d(y,\Lambda) < \delta_2/2\}.$$

又设 f 的不变集 Λ' 满足

$$\Lambda \subset \Lambda' \subset U_{\delta_2/2}(\Lambda).$$

step1 由引理 9.2.1, Λ 上的切丛 $T_\Lambda(M)$ 关于 $\mathrm{d}f$ 不变的 Whitney 和分解可以连续地扩充到 Λ 的一个开邻域 U^* 上,故不妨设

$$\Lambda \subset \Lambda' \subset U_{\delta_2/2}(\Lambda) \subset U^*,$$

从而,不妨设 Λ' 是 f 的双曲不变集.

step2 取

$$0 < \varepsilon \leqslant \min\{\varepsilon_1, \delta_2^2, (\delta_1^{-3} - 1)\}, \tag{9.5.8}$$

由定理 9.4.5, 存在 $0<\delta<\varepsilon$, 对任意 $x, y \in \Lambda'$ 当 $d(x,y)<\delta$ 时,存在唯一横截交点 $r(x,y)$ 使

$$W_\varepsilon^u(x) \pitchfork_{r[x,y]} W_\varepsilon^s(y).$$

step3 下证 $\Lambda' = \Lambda$, 即 Λ 是局部极大的.若其不然,应存在点 z 使

$$z \in U_\delta(\Lambda) \cap (\Lambda' - \Lambda) \neq \varnothing.$$

于是,存在点 $x \in \Lambda$ 使

$$d(x,z) < \delta.$$

由 step2, 存在 $r(x,z)$ 和 $r(z,x)$ 使

$$W_\varepsilon^u(x) \pitchfork_{r[x,z]} W_\varepsilon^s(z),$$
$$W_\varepsilon^u(z) \pitchfork_{r[z,x]} W_\varepsilon^s(x).$$

如果 $r(x,z) \overline{\in} \Lambda$, 由 $r(x,z) \in W_\varepsilon^u(x)$ 及 $0<\delta<\varepsilon$, 利用(9.5.6),(9.5.8)与引理 9.5.1 有

$$d_u(x, r(x,z)) < \delta_1^{-3} d(x, r(x,z)) < \delta_1^{-3} \cdot \varepsilon < \delta_1^{-3} \cdot \delta_1^4 = \delta_1,$$

再据引理 9.5.3, 存在 $N \geqslant 0$, 使

$$d(f^N(r(x,z)), \Lambda) > \delta_2.$$

从而,由 $r(x,z) \in W_\varepsilon^s(z)$ 得

$$\begin{aligned} d(f^N(z), \Lambda) &> \delta_2 - d(f^N(r(x,z)), f^N(z)) \\ &\geqslant \delta_2 - \varepsilon \\ &\geqslant \delta_2(1 - \delta_2) \\ &> \frac{1}{2}\delta_2. \end{aligned} \tag{9.5.9}$$

同理,若 $r(z,x) \overline{\in} \Lambda$, 也可得估计式(9.5.9).但是, $z \in \Lambda' - \Lambda$ 故(9.5.9)式与不变集 $\Lambda' \subset U_{\delta_2/2}(\Lambda)$ 矛盾.所以只可能是

$$r(x,z), r(z,x) \in \Lambda. \tag{9.5.10}$$

另一方面,由

$$r(x,z) \in W_\varepsilon^s(z), \quad r(z,x) \in W_\varepsilon^u(z),$$

及定理 9.4.2 和 9.4.4,有

$$z \in W_\varepsilon^s(r(x,z)) \cap W_\varepsilon^u(r(z,x)).$$

但是,由 Λ 具局部乘积结构和(9.5.10),且由 $\varepsilon \leqslant \delta_2^2 = \delta_1^4$,及 δ_1 的取法,有

$$z \in \Lambda,$$

这与 $z \in \Lambda' - \Lambda$ 矛盾,故 $\Lambda' = \Lambda$. □

下面给出极大双曲集的一个重要性质.

定理 9.5.2 设 $\Lambda \subset U$ 是微分同胚 f 的局部极大双曲集,则

$$\Omega(f|_\Lambda) = \overline{\mathrm{Per}(f|_\Lambda)}.$$

证明 由于 Λ 是紧集,由定理 2.2.1 知,$\Omega(f|_\Lambda)$是闭集,故

$$\overline{\mathrm{Per}(f|_\Lambda)} \subset \Omega(f|_\Lambda).$$

下面只需证

$$\Omega(f|_\Lambda) \subset \overline{\mathrm{Per}(f|_\Lambda)}. \tag{9.5.11}$$

任取 $x \in \Omega(f|_\Lambda)$, $\beta > 0$, 及 x 在 U 中的邻域 $V_{2\beta}$,使

$$V_{2\beta} = \{y \in U \mid d(y,x) < 2\beta\} \subset U(\Lambda) \subset U,$$

其中 $\beta, U(\Lambda)$以及 $0 < \alpha < 2\beta$ 均如定理 9.2.1 所述.置

$$V_{\alpha/2}^* = \Lambda \cap V_{\alpha/2}.$$

显然

$$x \in V_{\alpha/2}^* \subset V_{2\beta}.$$

由于 $x \in \Omega(f|_\Lambda)$,故存在 $N > 0$ 使

$$I_N = f^{-N}(V_{\alpha/2}^*) \cap V_{\alpha/2}^* \neq \varnothing.$$

若 $y \in I_N$,有 $y \in V_{\alpha/2}^*$及 $f^N(y) \in V_{\alpha/2}^*$,于是

$$d(y, f^N(y)) < \alpha. \tag{9.5.12}$$

再考虑赋以离散拓扑的空间

$$X_N = \{0, 1, \cdots, N-1\},$$

并在 X 上定义同胚映射

$$g: X_N \to X_N, k \mapsto k + 1 (\mathrm{mod} N), \quad \forall k \in X_N,$$

及

$$\varphi: X_N \to M, k \mapsto f^k(y), \quad \forall k \in X_N,$$

其中 $y \in I_N$.于是

$$\varphi \circ g(k) = f \circ \varphi(k), \quad k \in X_N \setminus \{N-1\},$$

故由(9.5.12)有

$$\begin{aligned}P(\varphi\circ g,f\circ\varphi)&=\sup_{k\in X_N}d(\varphi\circ g(k),f\circ\varphi(k))\\&=d(\varphi(g(N-1)),f(\varphi(N-1)))\\&=d(y,f^N(y))\\&<\alpha.\end{aligned}$$

应用伪轨族跟踪定理,存在映射 $\psi:X_N\to U(\Lambda)$,满足

$$\psi\circ g=f\circ\psi,$$

且

$$P(\varphi,\psi)<\beta.$$

令 $z=\psi(0)$,则

$$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)<\frac{1}{2}\alpha+P(\varphi,\psi)<2\beta.$$

故 $\psi(0)\in V_{2\beta}\subset U(\Lambda)$.可以证明递推关系式

$$\psi(k+1)=\psi(g(k))=f(\psi(k))=f^{k+1}(z),\quad k\in X_N,$$

及

$$\begin{aligned}f^N(z)&=f(f^{N-1}(z))=f(\psi(N-1))\\&=\psi(g(N-1))=\psi(0)=z,\end{aligned}$$

即 $\psi(0)\in V_{2\beta}$是f 在 $V_{2\beta}\subset U(\Lambda)$中的周期点,其周期$\leqslant N$.于是

$$x\in\overline{\mathrm{Per}(f)}.$$

注意到$f|_\Lambda$的周期点集是$U(\Lambda)$中的闭集,其与Λ的并是含Λ的映射 $f|_\Lambda$ 的闭不变集,由 Λ 的局部极大性,该集就是 Λ,于是

$$x\in\overline{\mathrm{Per}(f|_\Lambda)},$$

即(9.5.11)成立,从而定理的结论成立. □

推论 9.5.1 设 $f:M\to M$ 是 Anosov 微分同胚,则

$$\Omega(f)=\overline{\mathrm{Per}(f)}.$$

作为本节的另一个重要问题,是极大双曲集的结构稳定.

定理 9.5.3 (极大双曲集的结构稳定性) 设 $f\in C^1(U,M)$是从 U 到 $f(U)$的微分同胚,$\Lambda\subset U$ 是f 的局部极大双曲不变集,则 f 在Λ 上是结构稳定的,即对任意的 $\beta>0$,存在 f 在$C^1(U,M)$中的邻域 $\mathscr{U}_f$,使得对任意的 $g\in\mathscr{U}_f$,存在 g 的局部极大双曲不变集$\Delta\subset U$ 和同胚$h:\Lambda\to\Delta$,有

(1)$h\circ f|_\Lambda=g\circ h$,

(2)$P(h,id|_\Lambda)<\beta$,

其中 $id|_\Lambda:\Lambda\to M$,是放入映射.

证明　由定理 9.3.2 立即可得到本定理的结论，而只需证 Δ 也是局部极大的，这由下一定理可知. □

定理 9.5.4　在定理 9.5.3 的条件下，Δ 是局部极大的.

证明　在定理 9.5.3 的条件下，Δ 是 $g\in\mathcal{U}_f$ 的双曲不变集，取 Δ 的充分小的邻域 $U(\Delta)$，由定理 9.3.1 使 $g|_{U(\Delta)}$ 是可扩的，其可扩常数为 δ_1.

若 Δ 不是局部极大的，由定理 9.5.1，Δ 没有局部乘积结构.

下面取任意小的 $0<\delta<\delta_1/4$，使

$$\{x\,|\,d(x,\Delta)<\delta\}\subset U(\Delta)$$

对所取的 δ，存在 $x_1,x_2\in\Delta$，$d(x_1,x_2)<\delta$，但是

$$r(x_1,x_2)=W^u_\delta(x_1,g)\cap W^s_\delta(x_2,g)\,\overline{\in}\,\Delta. \tag{9.5.13}$$

由

$$d(r(x_1,x_2),\Delta)\leqslant d(r(x_1,x_2),x_1)<\delta,$$

有

$$r(x_1,x_2)\in U(\Delta).$$

另一方面，由定理 9.3.2，存在同胚 $h:\Lambda\to\Delta$，使

$$f\circ h^{-1}=h^{-1}\circ g.$$

当 δ 充分小时，自然要求 $d(x_1,x_2)$ 充分小；当 $g\in\mathcal{U}_f$ 充分接近 f 时，可使 h^{-1} 充分接近 id，进而 $d(h^{-1}(x_1),h^{-1}(x_2))$ 也充分小. 于是，当 $0<\varepsilon<(\delta_1-\delta)/2$ 充分小时，存在唯一的点 q 使

$$W^u_\varepsilon(h^{-1}(x_1),f)\ \pitchfork_q W^s_\varepsilon(h^{-1}(x_2),f). \tag{9.5.14}$$

$h^{-1}(x_1),h^{-1}(x_2)\in\Lambda$，由定理 9.5.1，$\Lambda$ 具有局部乘积结构，于是，$q\in\Lambda$.

再由定理 9.3.2，对任意给定的 $\beta>0$，有

$$P(h^{-1},id|_\Delta)<\beta,$$

故不妨设

$$\begin{aligned}d(x,y)&\leqslant d(x,h^{-1}(x))+d(h^{-1}(x),h^{-1}(y))+d(h^{-1}(y),y)\\&<2d(h^{-1}(x),h^{-1}(y)),\quad\forall x,y\in\Delta.\end{aligned}$$

记 $p=h(q)\in\Delta$，故对任意的 $n\in\mathbf{Z}_+$，由(9.5.13)和(9.5.14)，有

$$\begin{aligned}&d(g^n(p),g^n(r(x_1,x_2)))\\&\leqslant d(g^n(p),g^n(x_2))+d(g^n(x_2),g^n(r(x_1,x_2)))\\&\leqslant 2d(h^{-1}\circ g^n(p),h^{-1}\circ g^n(x_2))+\delta\\&=2d(f^n\circ h^{-1}(p),f^n\circ h^{-1}(x_2))+\delta\\&=2d(f^n(q),f^n(h^{-1}(x_2)))+\delta\\&<2\varepsilon+\delta\end{aligned}$$

$<\delta_1.$

类似地,对任意的 $n\in\mathbf{Z}_+$,有

$$d(g^{-n}(p),g^{-n}(r(x_1,x_2)))<\delta_1.$$

联合前式,由可扩映射的定义,知

$$r(x_1,x_2)=p\in\Delta,$$

与(9.5.13)式矛盾,故 Δ 是局部极大双曲集. □

利用定理 9.5.3 容易更一般地表述极大双曲集结构稳定性定理.

定理 9.5.5 (极大双曲集的结构稳定性) 在定理 9.5.3 的条件下,存在 Λ 的紧邻域 $U(\Lambda)$,对任意给定的正数 $\beta>0$,存在 f 在 $C^1(U,M)$ 中的邻域 $\mathscr{U}_f$,使得对任意的 $g_1,g_2\in\mathscr{U}_f$,存在 g_1 和 g_2 在 $U(\Lambda)$ 的极大双曲集 Δ_1 和 Δ_2,以及同胚

$$h:\Delta_1\to\Delta_2$$

满足

(1) $h\circ g_1|_{\Delta_1}=g_2\circ h$,

(2) $P(h,id|_{\Delta_1})<\beta$,

其中 $id|_{\Delta_1}:\Delta_1\to M$ 是放入映射.

证明 由定理 9.5.3,知 f 与 g_1,f 与 g_2 分别是拓扑共轭的,且 Δ_1 和 Δ_2 是极大双曲集,利用拓扑共轭的传递性质,可证结论成立. □

第十章　公理 A 与 Ω 稳定性

结构稳定性的概念,始发于 1937 年 A. Андронов 和 C. Понтрягин 对平面系统的研究,给出了平面有界区域 B 上系统为结构稳定的充要条件:

a1)系统在 B 内只有有限个奇元素,且均为双曲的.

a2)在鞍点之间无轨线连接.

其证明可见文献[116].随后,M. Peixoto[117]增加如下必要条件

a3)每一轨线均以奇元素为 α 极限集或 ω 极限集.

把上述研究推广到紧致的 2 流形 M^2 上.并进一步指出:M^2 上所有结构稳定的 C^r 系统的集合 S 在 M^2 上的 C^r 向量场的空间内为开稠集.

自此以来,探求结构稳定和 Ω 稳定的微分同胚的特征,一直是微分动力系统研究中的一个主要问题.大约在 20 世纪 60 年代,Smale 提出两个著名的推测

b1)$f\in \mathrm{Diff}^1(M)$为结构稳定的充要条件是 f 满足公理 A 和强横截条件.

b2)$f\in \mathrm{Diff}^1(M)$为 Ω 稳定的充要条件是 f 满足公理 A 和无环条件.

所谓公理 A 是指:

c1)$\Omega(f)$是双曲的.

c2)$\overline{\mathrm{Per}(f)}=\Omega(f)$.

第一个猜测的充分性,由 Robbin-Robinsen[118,119]证得:$f\in \mathrm{Diff}^1(M)$满足公理A及强横截性条件,即 $W^u(x)\pitchfork W^s(y)$, $\forall\, x, y\in\Omega(f)$,则 f 在 $\mathrm{Diff}^1(M)$ 中是结构稳定的.

第二个猜测的充分性,由 Smale[120]证得.本章主要介绍这一工作.

当 $\Omega(f)$是有限双曲集时的结构稳定性,类似的研究还有 Palis 和 Smale 的工作[121].

应当特别指出的是,在 $\dim M\geqslant 2$ 时的必要性部分,即所谓稳定性推测,仍未见解决.其中较好的工作,有我国著名数学家廖山涛先生[122],其主要结果是:

d1)设 $f\in \mathrm{Diff}^1(M^2)$,则 f 为 Ω 稳定的必要条件是 f 满足公理 A 及无环性,而 f 为结构稳定的必要条件是 f 满足公理 A 及强横截性.

d2)$f\in \mathrm{Diff}^1(M^2)$为 Ω 稳定的充要条件是 $f\in\mathscr{F}^*(M^2)$.

顺便提及的是,在 Peixoto[117]的工作后,关于不可定向流形上的情况,还有更深入的讨论;另一方面,由于 $\dim M>2$ 时,开稠性的结论不再保持,又导

致通有性的深入研究.

§10.1 公理A与局部乘积结构

紧致光滑Riemann流形 M 上满足公理A条件的微分同胚 f,有一个重要的性质,就是在其非游荡点集 $\Omega(f)$ 上具有局部乘积结构.为证明这一事实,将使用微分动力系统中深刻而有用的工具:λ 引理(Palis[123])和雾状引理.

λ 引理是对一个双曲鞍点的性质在高维流形上的推广,下面从二维情况作一直观的说明.设 f 以0为鞍状不动点,在 x 轴方向压缩,而在 y 轴方向扩张,使 x 轴为稳定流形而 y 轴为不稳定流形.在其稳定流形(x 轴)上一点 q 处取横截于 x 轴的小弧段 s^u,那么 s^u 在 f 的逐次迭置映射之一的像

$$f^n(s^u),\qquad n=1,2,\cdots,$$

由鞍状特性,将随 n 增大而伸长并逐步趋于不稳定流形(y 轴).$f^n(s^u)$ 与 x 轴的交点亦将趋于鞍点0.

下面给出 λ 引理的数学描述,为使用方便,对其叙述形式已稍作改动,并略去证明.

设 M 是 $C^r(r\geqslant 1)$Riemann流形,d 是 M 上由Riemann度量诱导出的距离.又设 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$,点 $a\in M$ 是 f 的双曲不动点,以 E^s 和 E^u 分别表示 $Df(a)$(记导算子 d 为 D)的稳定子空间和不稳定子空间,并且

$$|Df(a)|_{E^s}|<\tau,\quad |Df^{-1}(a)|_{E^u}|<\tau,\quad 0<\tau<1.$$

其中 $|\cdot|$ 是相应的范数.对 $0<\rho$,记

$$E^s(\rho)=\{u\in E^s\,|\,|u|<\rho\},$$
$$E^u(\rho)=\{v\in E^u\,|\,|v|<\rho\}.$$

又设 $I\subset M$ 为 C^r 嵌入子流形,满足

$$\dim I=\dim W^u(a),$$

且存在 $q\in M$ 使

$$I\pitchfork_q W^s(a).$$

再记

$$q_0=q,\quad q_n=f^n(q),\quad \forall n\in \mathbf{Z}_+;$$
$$I_0=I,\quad I_n=f^n(I),\quad \forall n\in \mathbf{Z}_+.$$

定理10.1.1 (λ 引理)[123] 在前述记号下,任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,$n_0\in \mathbf{Z}_+$ 以及双曲不动点 a 的开邻域 $U(a)$,当 $n\geqslant n_0$ 时,有结论

(1) $I_n\pitchfork_{q_n}W^s(a)$,且 $d(q_n,a)<\varepsilon$.

(2)存在 C^r 映射 $h_n^u:E^u(\delta)\to E^s(\delta)$,使 $I_n\cap U(a)$ 可表示为图

$$G_n^u = (id, h_n^u)E^u(\delta),$$

且

$$|Dh_n^u| < \varepsilon$$

成立. □

注 10.1.1 与定理 10.1.1 对偶的结论是,设 $J \subset M$ 为 C^r 嵌入子流形,满足

$$\dim J = \dim W^s(a),$$

且存在 $p \in M$ 使 $W^u(a) \pitchfork_p J$. 再记

$$p_0 = p, \quad p_n = f^{-n}(p), \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+,$$

$$J_0 = J, \quad J_n = f^{-n}(J), \quad \forall n \in \mathbf{Z}_+,$$

则当 $n \geqslant n_0$ 时,有

(1) $W^u(a) \pitchfork_{p_n} J_n$, 且 $d(p_n, a) < \varepsilon$.

(2)存在 C^r 映射 $h_n^s: E^s(\delta) \to E^u(\delta)$, 使 $J_n \cap U(a)$ 可表示为图

$$G_n^s = (h_n^s, id)E^s(\delta),$$

且

$$|Dh_n^s| < \varepsilon.$$ □

推论 10.1.1 在定理 10.1.1 的条件下,设 $I, J \subset M$ 是 C^r 子流形, $\dim I = \dim W^u(a)$, $\dim J = \dim W^s(a)$ 并且

$$I \pitchfork_q W^s(a), \quad J \pitchfork_p W^u(a),$$

则存在充分大的自然数 n,使得 $I_n = f^n(I)$ 与 J 横截相交于某个任意接近于 p 的点,而 $J_n = f^{-n}(J)$ 与 I 横截相交于某个任意接近于 q 的点.

证明 任给 $\varepsilon > 0$, 记 $U = J \cap O(p, \varepsilon)$. 按定理 10.1.1 和注 10.1.1, 当 $n \to +\infty$ 时, $q_n = f^n(q)$ 和 $p_n = f^{-n}(p)$ 趋近于 a, 且 f^{-1} 在 a 点附近沿 E^s 方向是扩张的, 于是 $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ 充分大时, 存在点 $t \in O(a, \varepsilon)$ 使

$$f^{n_1}(I) \pitchfork_t f^{-n_2}(U)$$

或

$$I_{n_1+n_2} \pitchfork_{f^{n_2}(t)} U,$$

即 $I_n (n = n_1 + n_2)$ 与 J 横截相交于任意接近于 p 的点;类似可证另一结论. □

推论 10.1.2 条件和记号同推论 10.1.1, 设 $U, V \subset M$ 是开集, 且

$$U \cap W^s(a) \neq \varnothing \quad (V \cap W^u(a) \neq \varnothing),$$

则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在充分大的自然数 n_1(或 n_2)及

$$x \in f^{n_1}(U) \cap J \quad (y \in f^{-n_2}(V) \cap I),$$

使

$$d(x,p) < \varepsilon \quad (d(y,q) < \varepsilon).$$

证明 取$q' \in U \cap W^s(a)$，并取过q'点与$W^s(a)$横截相交的k维圆盘$I' \subset U$，$k = \dim W^u(a)$，对 I'应用推论 10.1.1，可知 $x \in f^{n_1}(U) \cap J$ 的存在性及$d(x,p) < \varepsilon$；类似可证另一结论. □

定理 10.1.2 (雾状引理) 设 $x, y \in M$ 是f的双曲周期点，且

$$W^u(x,f) \pitchfork_p W^s(y,f), \quad W^u(y,f) \pitchfork_q W^s(x,f),$$

则 $p, q \in \Omega(f)$.

证明 由 $x, y \in M$ 是f的周期点，注意到

$$\Omega(f^n) \subset \Omega(f),$$

且

$$W^u(\alpha,f) \subset W^u(\alpha,f^n), \quad W^s(\alpha,f) \subset W^s(\alpha,f^n), \quad \alpha \in \{p,q\},$$

故不妨设 x 和 y 都是f的不动点.

设 U 是q 点的任意小的开邻域，于是

$$U \cap W^s(x,f) \neq \varnothing,$$

按推论 10.1.2，存在自然数 k，使

$$f^k(U) \cap W^s(y,f) \neq \varnothing.$$

再利用推论 10.1.2，存在自然数 l，使

$$f^l(f^k(U)) \cap U \cap W^s(x,f) \neq \varnothing,$$

从而

$$f^{k+l}(U) \cap U \neq \varnothing,$$

故 $q \in \Omega(f)$；类似可证 $p \in \Omega(f)$. □

定义 10.1.1 设 M 是一个紧致光滑的 Riemann 流形，$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$满足如下条件，

(A1)$\Omega(f)$具有双曲结构，

(A2)$\overline{\mathrm{Per}(f)} = \Omega(f)$，即周期点集在非游荡点集中稠密，

则称 f 满足“公理 A”条件.

命题 10.1.1 $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$是紧致光滑 Riemann 流形上的 Anosov 微分同胚，则 f 满足公理 A.

证明 由推论 9.5.1 可证. □

定理 10.1.3 设 M 是紧致光滑 Riemann 流形，$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$满足公理 A，则 f 的非游荡集$\Omega(f)$具有局部乘积结构.

证明 设 f 满足公理 A. 任给 $\varepsilon > 0$，对 f 的双曲不变集$\Omega(f)$中的任意两点 x 和y，由定理 9.4.5，存在 $\delta > 0$，当 $d(x,y) < \delta$ 时，有

$$W^u_\varepsilon(x) \pitchfork_{r(x,y)} W^s_\varepsilon(y), \quad W^u_\varepsilon(y) \pitchfork_{r(y,x)} W^s_\varepsilon(x).$$

如果 $x, y \in \mathrm{Per}(f)$，则由定理 10.1.2，有

$$r(x,y), r(y,x) \in \Omega(f); \qquad (10.1.1)$$

否则，由条件 $\overline{\mathrm{Per}(f)} = \Omega(f)$，即 x 和 y 是 $\mathrm{Per}(f)$ 的聚点，故存在 $x', y' \in \mathrm{Per}(f)$ 使得 x' 和 y' 分别充分逼近 x 和 y. 同样，由定理 10.1.2，有

$$r(x',y'), r(y',x') \in \Omega(f).$$

而由定理9.4.5，$r(x,y)$ 和 $r(y,x)$ 连续地依赖于 x 和 y，即 $r(x',y')$ 和 $r(y',x')$ 分别可以任意地逼近 $r(x,y)$ 和 $r(y,x)$. 再由 $\Omega(f)$ 的闭性，同样有(10.1.1)成立，故结论成立. □

推论 10.1.3　在定理 10.1.3 的条件下，$\Omega(f)$ 是局部极大的.

证明　由定理 9.5.1 可证. □

定理 10.1.4　设 M 是紧致光滑的 Riemann 流形，$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ 在其紧致双曲不变集 Λ 上具有局部乘积结构，则

$$W^s(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x), \quad W^u(\Lambda) = \bigcup_{x \in \Lambda} W^u(x),$$

其中 $W^s(\Lambda) = \{x \in M \mid \lim_{k \to +\infty} d(f^k(x), \Lambda) = 0\}$，类似定义 $W^u(\Lambda)$.

证明　首先证第一式，为此，只须证

$$W^s(\Lambda) \subset \bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x). \qquad (10.1.2)$$

取 $\varepsilon > 0$，作 $W^s_\varepsilon(x)$，再取

$$0 < \beta < \varepsilon/2, \quad 0 < \alpha < \beta, \quad 0 < \gamma < \alpha/2,$$

满足

$$p, q \in M, d(p,q) < \gamma \Rightarrow d(f(p), f(q)) < \alpha/2.$$

对任意的 $y \in W^s(\Lambda)$，存在 $N \in \mathbf{N}$，当 $n \geqslant N$ 时，可取 $x_n \in \Lambda$，使

$$d(f^n(y), x_n) < \gamma, \quad \forall n \geqslant N.$$

又补充定义

$$x_n = f^{n-N}(x_N), \quad \forall n \in \mathbf{Z}, n < N.$$

不难核验 $\{x_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ 是 α 伪轨，于是由定理 9.2.2，存在 $x \in \Lambda$，使 $\mathrm{Orb}_f(x)$ 可以 β 跟踪 $\{x_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$. 这时，对任意 $n \geqslant N$，有

$$d(f^n(y), f^n(x)) \leqslant d(f^n(y), x_n) + d(x_n, f^n(x)) \leqslant \gamma + \beta < \varepsilon,$$

于是

$$f^N(y) \in W^s_\varepsilon(f^N(x)),$$

从而

$$y \in f^{-N}(W^s_\varepsilon(f^N(x)) \subset W^s(x),$$

即(10.1.2)式成立. 在第一式中以 f^{-1} 代 f 即得第二式. □

定理 10.1.5　设 M 是紧致光滑的 Riemann 流形，$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$，满足公理 A，则

$$M = \bigcup_{x\in\Omega(f)} W^s(x) = \bigcup_{x\in\Omega(f)} W^u(x).$$

证明 设$U\subset M$，$f:U\to f(U)$是微分同胚且满足公理A，由推论10.1.3，$\Omega(f)$是局部极大双曲不变集. 于是，可以证明如下断言：

存在$\Omega(f)$的开邻域$V\subset U$，使得对任意$y\in V$，当$f^n(y)\in V(\forall n\in \mathbf{N})$时，必存在$x\in\Omega(f)$使得$y\in W^s(x)$.

由$\Omega(f)$的局部极大性，可取其邻域$U_1\subset U$，使得任意不变集Λ满足

$$\Omega(f)\subset\Lambda\subset U_1\Rightarrow\Omega(f)=\Lambda.$$

同时，由伪轨跟踪定理，存在$\Omega=\Omega(f)$的邻域$U(\Omega)$及$\alpha>0$，使得对$U(\Omega)$中α伪轨，存在β跟踪的轨道$\mathrm{Orb}_f(x)$.

任给$\varepsilon>0$，取$0<\beta<\varepsilon/2$，$0<\alpha<\beta$，置

$$V = U_\alpha(\Omega)\cap U(\Omega)\subset U_\beta(\Omega)\subset U_1,$$

其中$U_\alpha(\Omega)=\{y\in M\mid d(y,\Omega)<\alpha\}$，$U_\beta(\Omega)$与此类似.

设$y\in V$，且$f^n(y)\in V$，$n\in\mathbf{N}$. 取$x'\in\Omega$，于是

$$d(x',y)<\alpha.$$

又定义

$$x_n=\begin{cases} f^n(y), & n\geqslant 0,\\ f^n(x'), & n<0.\end{cases}$$

显然，$\{x_n\mid n\in\mathbf{Z}\}$是$V\subset U(\Omega)$中的$\alpha$伪轨，故存在$\beta$跟踪的轨道$\mathrm{Orb}_f(x)$. 因为$\Omega\cup\mathrm{Orb}_f(x)\subset V\subset U_1$，是$f$的不变集，由$\Omega(f)$的极大性，有$x\in\Omega(f)$. 易证

$$d(f^n(y),f^n(x))\leqslant d(f^n(y),x_n)+d(x_n,f^n(x))<\varepsilon,$$

故$y\in W^s(x)$，即上述断言成立. 下证定理结论.

设$z\in M\setminus\Omega(f)$，则由$\Omega(f)$的紧性，存在$\Omega(f)$的开邻域V_1和z点的开邻域$U(z)$满足

$$\Omega(f)\subset V_1\subset V,\quad U(z)\cap V_1=\varnothing.$$

由$z\overline{\in}\Omega(f)$，有

$$U(z)\cap f^n(U(z))=\varnothing,\quad \forall n\in\mathbf{N}. \tag{10.1.3}$$

紧集$M\setminus V_1$上的开覆盖族$\{U(z)\mid z\in M\setminus\Omega(f)\}$，存在有限覆盖

$$U(z_1),U(z_2),\cdots,U(z_p).$$

对任一$y\in M$，若$y\in\Omega(f)$，则$y\in W^s(y)$；若$y\overline{\in}\Omega(f)$，则存在上面所取的V_1和有限开覆盖，使得如果$y\in U(z_t)$对某个$1\leqslant t\leqslant p$成立，那么由(10.1.3)式，存在$N_0\in\mathbf{N}$，当$n\geqslant N_0$时，有$f^n(y)\in V_1$，取$\xi=f^{N_0}(y)$，有$f^n(\xi)\in V_1(\forall n\in\mathbf{N})$，故存在$p\in\Omega(f)$，有

$$\xi=f^{N_0}(y)\in W^s(f^{N_0}(p)),$$

或

$$y \in f^{-N_0} W^s(f^{N_0}(p)) \subset W^s(p),$$

即

$$M \subset \bigcup_{x \in \Omega(f)} W^s(x),$$

易知第一个等式成立. 用 f^{-1} 代换上述 f, 可证第二个等式成立. □

注10.1.2 从结构稳定性的定义可知, 结构稳定系统在 $\mathrm{Diff}^1(M)$ 中构成开集, 当 $\dim M = 2$ 时, 它也是稠密集. 那么, 满足公理 A 的系统是否构成 $\mathrm{Diff}^1(M)$ 中的一个开稠集呢, Smale 最初提出这一猜想, 但不久就以他自己的反例[124]给出了这一猜想的否定答案, 即在一个三维环面 T^3 上构造了一个微分同胚 f, 使其在 $\mathrm{Diff}^1(T^3)$ 中存在一个开邻域 V, 对任意 $g \in V$ 的任意邻域 U 均存在微分同胚 $g' \in U$, 而 g' 不是结构稳定的. 由于结构稳定的微分同胚在 $\mathrm{Diff}^1(T^3)$ 中是开的, 故不能是稠密的. 类似在 S^2 上的例子还有文献[125]. 为了放宽开稠性, 就导致通有性的研究, 见文献[92], [116], [126], [127]; 当然, 通有性的研究, 并不在公理 A 系统提出之后.

注 10.1.3 在公理 A 的条件中, $\Omega(f)$ 具有双曲结构不能推出 $\overline{\mathrm{Per}(f)} = \Omega(f)$. A. Dankner[128]曾举出 M^3 上的一个微分同胚, 具有双曲的 $\Omega(f)$ 且为无限集, 但其中只有有限个周期点.

§10.2 谱 分 解

设 X 是拓扑空间, $f \in \mathrm{Homeo}(X)$, 如果存在 $x \in X$, 使 $\overline{\mathrm{Orb} f(x)} = X$, 则称 f 为拓扑的传递的(见§2.3 中定义 2.3.3). 由定理 2.3.2 知, f 拓扑传递的充要条件是: 对 X 的任意两个非空开集 U 和 V, 存在 $n \in \mathbf{Z}$, 使

$$f^n(U) \cap V \neq \varnothing.$$

下面利用拓扑传递给出谱分解的概念.

定义 10.2.1 设紧集 $\Omega \subset X$ 是 f 的不变集, 且 $f: \Omega \to \Omega$ 是同胚, 如果 Ω 存在有限个互不相交的闭不变子集 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_k$, 使

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j,$$

且 f 限制在每一个不变子集 Ω_j 上, $f|_{\Omega_j}$ 是拓扑传递的, 则称 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_k$ 是 Ω 关于 f 的一个谱分解, 而 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_k$ 称为 $\Omega(f)$ 的基本集.

设 M 是紧致光滑 Riemann 流形, $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, 点 $p \in \mathrm{Per}(f)$, 记

$$W_p = W^u(p) \cap \Omega(f), \quad X_p = \overline{W_p},$$

简记 $\Omega = \Omega(f)$, 置

$$B_\eta(S) = \{y \in \Omega \mid d(y, S) < \eta\},$$

引理 10.2.1 设同胚 $f\in \mathrm{Diff}^1(M)$满足公理 A, $\Omega=\Omega(f)$是其非游荡集,常数 $\delta>0$ 由定理 9.4.5 所定义,则有如下结论成立:

(1)对于 $0<\eta<\delta$, $p\in \mathrm{Per}(f)$,有

$$X_p = B_\eta(W_p) = B_\eta(X_p).$$

(2)对于 $p,q\in \mathrm{Per}(f)$,若 $X_p\cap X_q\neq\varnothing$,则 $X_p=X_q$,即$\{X_p\mid p\in \mathrm{Per}(f)\}$中的元素是两两不交的.

证明 首先证结论(1).显然,由 X_p 和 W_p 的定义有

$$X_p \subset B_\eta(W_p) \subset B_\eta(X_p),$$

故只须证

$$B_\eta(X_p) \subset X_p. \tag{10.2.1}$$

任取 $x\in B_\eta(X_p)$,即 $x\in\Omega$ 且 $d(x,\overline{W}_p)<\eta$,于是,存在 $y\in W_p=W^u(p)\cap\Omega$,使

$$d(x,y) < \eta < \delta.$$

由 $\Omega(f)$具有双曲结构及定理 9.4.5,存在 $r(y,x)\in M$,使

$$W^u(y) \pitchfork_{r(y,x)} W^s(x).$$

由定理 10.1.3, $\Omega=\Omega(f)$具有局部乘积结构,故

$$r(y,x) \in \Omega,$$

并且,由 $W^u(y)\subset W^u(p)$,有

$$r(y,x) \in W^u(p) \cap \Omega, \quad r(y,x) \in W^s(x) \cap \Omega.$$

如果 $x\in \mathrm{Per}(f)$,设其周期为 m,由上两式及 $p\in \mathrm{Per}(f)$,可证

$$x = \lim_{k\to+\infty} f^{km}(r(y,x)) \in \overline{W^u(p)\cap\Omega} = X_p, \tag{10.2.2}$$

即(10.2.1)成立.如果 $x\overline{\in} \mathrm{Per}(f)$,由 $x\in\Omega(f)=\overline{\mathrm{Per}(f)}$,可用周期点列$\{x_n\}\subset \mathrm{Per}(f)$去逼近 x,而 x_n 满足(10.2.2)于是

$$x = \lim_{n\to+\infty} x_n \in X_p,$$

同样有(10.2.1)成立,故结论(1)成立.

下证结论(2).设 $p,q\in \mathrm{Per}(f)$且存在 $y\in X_p\cap X_q$.由结论(1),有

$$y \in X_p \cap X_q = B_\eta(W_p) \cap X_q,$$

即 $d(y,W_p)<\eta$ 且 $y\in X_q$.于是,存在 $x\in W_p=W^u(p)\cap\Omega$,使

$$d(x,X_q) \leqslant d(x,y) < \eta,$$

即

$$x \in B_\eta(X_q) = X_q.$$

下证

$$W_p \subset X_q. \tag{10.2.3}$$

从而

$$X_p = \overline{W_p} \subset X_q. \tag{10.2.4}$$

设 p, q 的周期分别为 m 和 n. 注意到 $x \in X_q$ 且 X_q 是 f^n 的闭不变集, 有

$$f^{-kmn}(x) \in X_q,$$

再由 $x \in W_p = W^u(p) \cap \Omega$, 有

$$p = \lim_{k \to +\infty} f^{-kmn}(x) \in X_q.$$

对任意的 $z \in W_p$, 同样有

$$\lim_{k \to +\infty} f^{-kmn}(z) = p \in X_q.$$

因而当 k 充分大时, 有

$$f^{-kmn}(z) \in B_\eta(X_q) = X_q,$$

故

$$z \in f^{kmn}(X_q) = X_q,$$

即(10.2.3)成立. 同理可证 $X_q \subset X_p$, 联合(10.2.4), 知结论(2)成立. □

引理 10.2.2 如果 $\{\Delta_j \mid j = 0, 1, \cdots, k\}$ 满足条件

$$\Delta_k = \Delta_0, \text{且 } f(\Delta_j) = \Delta_{j+1}, \quad j = 0, 1, \cdots, k-1,$$

则 $\Delta = \bigcup_{j=0}^{k-1} \Delta_j$ 是 f 的不变集.

引理 10.2.3 在引理 10.2.1 的条件下, 设 $p \in \mathrm{Per}(f)$, U 和 V 是 X_p 中的两个非空开集, 则存在 $N \in \mathbf{Z}$, 使

$$f^N(U) \cap V \neq \varnothing.$$

证明 由所设开集 U 满足

$$U \cap X_p \neq \varnothing,$$

不妨设周期点 $q \in U \cap X_p$, 由引理 10.2.1, 有

$$X_q = X_p,$$

从而

$$V \cap X_q = V \cap X_p = V \neq \varnothing,$$

且 V 是 X_p 中的开集, 故存在

$$x \in V \cap W_q.$$

设 p 和 q 的周期分别为 m 和 n, 则

$$\lim_{k \to +\infty} f^{-kmn}(x) = q \in U,$$

于是, 存在充分大的 k 使

$$f^{-kmn}(x) \in U.$$

记 $N = kmn$, 有

$$x \in f^N(U) \cap V,$$

即结论成立. □

定理 10.2.1（谱分解定理） 设 M 是紧致光滑的 Riemann 流形，$f\in \mathrm{Diff}^1(M)$满足公理 A，则 $\Omega=\Omega(f)$存在唯一的谱分解 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_k$.

证明 对 $p\in \mathrm{Per}(f)$，作 Ω 中的开集

$$X_p = B_\eta(X_p).$$

由 Ω 的紧性及引理 10.2.1 的结论(1)，有

$$\Omega \subset \bigcup_{p\in \mathrm{Per}(f)} B_\eta(X_p) = \bigcup_{p\in \mathrm{Per}(f)} X_p,$$

故存在有限个 $p_1,p_2,\cdots,p_n\in \mathrm{Per}(f)$使

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} X_j$$

其中 $X_j=X_{p_j}$，且由引理 10.2.1 的结论(2)，知$\{X_j|j=1,\cdots,n\}$是两两不交的.再由

$$f(X_j) = X_{f(j)},$$

可得到置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}.$$

将该置换分解成彼此独立的轮换的乘积，然后将每一轮换中所涉及的 X_j 作成并集，记为 Ω_i，而得到两两不交的闭子集

$$\Omega_1,\Omega_2,\cdots\Omega_k,$$

由引理 10.2.2 知其是 f 不变的.显然

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j.$$

易证 $f|\Omega_j$ 是拓扑传递的.事实上，对 Ω_j 中任意两个非空开集 U 和 V，按 Ω_j 的作法，不妨设 U 和 V 在某个开集X_p 中，由引理 10.2.3，存在 $N\in \mathbf{Z}$，使

$$f^N(U)\cap V\neq\varnothing,$$

故 $f|\Omega_j$ 是拓扑传递的.

因此，$\Omega(f)$存在谱分解 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_k$，下证唯一性.

如果 $\Omega(f)$另有一个谱分解

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{m} \Delta_j.$$

由于 Δ_j 是紧集$\Omega(f)$中的闭子集，故存在有限覆盖使

$$\Delta_j = X_{q_1}\cup X_{q_2}\cup\cdots\cup X_{q_t},$$

其中 $q_j(j=1,2,\cdots,t)\in \mathrm{Per}(f)\cap\Delta_j$.重复上述作法，同样有

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{m} \Delta_j = \bigcup_{j=1}^{n} \Omega'_j.$$

利用引理 10.2.1 的结论(2)，可以证明

$$n = k,$$

$$\Omega'_j = \Omega_j,$$

其中 Ω'_j 的下标经过重新排列，故谱分解是唯一的．□

§10.3　滤子与无环条件

设 M 是紧致流形，$f \in \mathrm{Homeo}(M)$．

定义 10.3.1　称 M 中的紧致集列

$$\varnothing = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M$$

为 M 关于 f 的一个滤子 $\mathcal{M}$，若有条件

$$f(M_j) \subset \mathrm{int} M_j, \quad j = 1, 2, \cdots, k-1$$

成立．其中 $\mathrm{int} M_j$ 表示 M_j 的内点集．

下面引入记号，置

$$K_j^f(\mathcal{M}) = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(M_j \setminus M_{j-1}), \tag{10.3.1}$$

$$K^f(\mathcal{M}) = \bigcup_{j=1}^{k} K_j^f(\mathcal{M}). \tag{10.3.2}$$

在不致引起混淆的地方，分别简记 $K_j^f(\mathcal{M})$和 $K^f(\mathcal{M})$为 K_j^f 和 K^f．

命题 10.3.1　对于滤子 $\mathcal{M}$，有

$$K_j^f = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(M_j \setminus \mathrm{int} M_{j-1}) = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(\mathrm{int} M_j \setminus M_{j-1}),$$

因而 $K_j^f (j = 1, 2, \cdots, k)$是两两不交的紧集，并且存在 K_j^f 的紧致邻域

$$U_j = M_j \setminus \mathrm{int} M_{j-1} \supset \mathrm{int} M_j \setminus M_{j-1} \supset K_j^f,$$

满足

$$K_j^f = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(U_j), \quad j = 1, 2, \cdots, k.$$

证明　由 $M_j \setminus M_{j-1} \subset M_j \setminus \mathrm{int} M_{j-1}$，有

$$\bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(M_j \setminus M_{j-1}) \subset \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(M_j \setminus \mathrm{int} M_{j-1}).$$

另一方面，由 $f(M_{j-1}) \subset \mathrm{int} M_{j-1}$，有

$$f^{-1}(M \setminus \mathrm{int} M_{j-1}) \subset M \setminus M_{j-1}$$

或

$$\begin{aligned} f^n(M_j \setminus M_{j-1}) &= f^n(M_j) \cap f^n(M \setminus M_{j-1}) \\ &\supset f^n(M_j) \cap f^{n-1}(M \setminus \mathrm{int} M_{j-1}), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(M_j \setminus M_{j-1}) &\supset \Big(\bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(M_j)\Big) \cap \Big(\bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(M \setminus \mathrm{int} M_{j-1})\Big) \\ &= \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(M_j \setminus \mathrm{int} M_{j-1}), \end{aligned}$$

联合前证及(10.3.1)，有

$$K_j^f = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(M_j \setminus \text{int} M_{j-1}).$$

利用

$$f(M_j) \subset \text{int} M_j \subset M_j,$$

类似可证后一结论. □

命题 10.3.2 对于滤子 $\mathcal{M}$, f 的非游荡集 $\Omega = \Omega(f)$ 有两两不交的分解式

$$\Omega(f) = \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j,$$

其中 $\Omega_j = \Omega \cap (M_j \setminus M_{j-1})$, $j = 1, 2, \cdots, k$, 是 f 的不变集, 于是

$$\Omega_j = \Omega \cap K_j^f, \quad j = 1, 2, \cdots, k$$

成立, 且是紧集.

证明 显然, $M_j \setminus M_{j-1}$, $j = 1, 2, \cdots, k$, 是两两不交的. 下面, 只需证 Ω_j, $j = 1, 2, \cdots, k$, 是 f 的不变集.

step1 可以断言, 若 $x \in \Omega \cap (M \setminus M_{j-1})$, 则对任意的 $n \in \mathbf{N}$ 有 $f^n(x) \overline{\in} M_{j-1}$.

若其不然, 设 $x \in \Omega \cap (M \setminus M_{j-1})$ 且存在 $k \in \mathbf{N}$ 使

$$f^k(x) \in M_{j-1},$$

即

$$f^{k+1}(x) \in f(M_{j-1}) \subset \text{int} M_{j-1}.$$

故存在 x 的邻域 $U \subset M \setminus M_{j-1}$ 且 $f^{k+1}(U) \subset \text{int} M_{j-1}$, 当 $n \geqslant k+1$ 时

$$f^n(U) = f^{n-k-1}(f^{k+1}(U)) \subset f^{n-k-1}(\text{int} M_{j-1}) \subset \text{int} M_{j-1},$$

从而

$$f^n(U) \cap U = \varnothing,$$

由(4.2.10)式, 与 $x \in \Omega(f)$ 矛盾, 故上述断言成立.

step2 可以断言, 若 $x \in \Omega$ 且存在 $m \in \mathbf{N}$ 使 $f^{-m}(x) \in M \setminus M_j$, 则 $x \overline{\in} M_j$.

事实上, 由 $z = f^{-m}(x) \in \Omega \cap (M \setminus M_j)$, 及 step1 所证断言, 有

$$x = f^m(z) \overline{\in} M_j.$$

step3 下面证明三个包含关系. 首先, 由

$$f(M_{j-1}) \subset \text{int} M_{j-1} \subset M_{j-1},$$

有

$$f(M \setminus M_{j-1}) \supset M \setminus M_{j-1}. \tag{10.3.3}$$

其次, 对任一 $x \in \Omega \cap f(M \setminus M_{j-1})$, 即 $f^{-1}(x) \in M \setminus M_{j-1}$, 由断言 step2, 有 $x \in M \setminus M_{j-1}$, 即

$$\Omega \cap f(M \setminus M_{j-1}) \subset \Omega \cap (M \setminus M_{j-1}). \tag{10.3.4}$$

最后，有

$$\Omega \cap M_j \subset f(\Omega \cap M_j). \tag{10.3.5}$$

若其不然，存在 $x \in \Omega \cap M_j$ 但 $f^{-1}(x) \overline{\in} \Omega \cap M_j$ 由断言 step2，有 $x \overline{\in} M_j$，与所设矛盾，故(10.3.5)式成立.

step4　证 Ω_j 是 f 的不变集. 首先，由(10.3.4)，有

$$\begin{aligned} f(\Omega_j) &= \Omega_j \cap f(M_j) \cap f(M \setminus M_{j-1}) \\ &\subset \Omega_j \cap M_j \cap (M \setminus M_{j-1}) = \Omega_j. \end{aligned}$$

其次，由(10.3.3)和(10.3.5)，有

$$\begin{aligned} f(\Omega_j) &\supset \Omega \cap M_j \cap f(M \setminus M_{j-1}) \\ &\supset \Omega \cap M_j \cap (M \setminus M_{j-1}) = \Omega_j, \end{aligned}$$

联合上式，有结论成立. □

设 M 是可度量化的紧流形，$\Gamma \subset M$ 是 f 的闭不变集，分别称

$$W_f^s(\Gamma) = \{x \in M \mid \lim_{n \to +\infty} d(f^n(x), \Gamma) = 0\},$$

$$W_f^u(\Gamma) = \{x \in M \mid \lim_{n \to +\infty} d(f^{-n}(x), \Gamma) = 0\},$$

为 Γ 关于映射 f 的稳定集和不稳定集. 由定义和注 2.2.1 易知

$$x \in W_f^s(\Gamma) \Leftrightarrow L_\omega^f(x) \subset \Gamma, \tag{10.3.6}$$

$$x \in W_f^u(\Gamma) \Leftrightarrow L_\alpha^f(x) \subset \Gamma, \tag{10.3.7}$$

其中 $L_\omega^f(x)$ 和 $L_\alpha^f(x)$ 分别是映射 f 的 ω 极限点集和 α 极限点集(见定义 2.2.2). 又记

$$L(f) = L_\omega^f \cup L_\alpha^f = \bigcup_{x \in M} (L_\omega^f(x) \cup L_\alpha^f(x)),$$

为 f 的极限集. 有时，为书写简便又省去上标 f 和下标 f.

命题 10.3.3　设 $\Lambda_j (j = 1, 2, \cdots, k)$ 是紧致流形 M 中两两不交并对映射 $f \in \mathrm{Homeo}(M)$ 不变的闭子集，且

$$L(f) \subset \bigcup_{j=1}^{k} \Lambda_j,$$

则

$$M = \bigcup_{j=1}^{k} W^s(\Lambda_j) = \bigcup_{j=1}^{k} W^u(\Lambda_j).$$

证明　先证第一个等号是成立的. 显然

$$M \supset \bigcup_{j=1}^{k} W^s(\Lambda_j),$$

故只须证

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{k} W^s(\Lambda_j).$$

为此，对任一 $x \in M$，由(10.3.6)只需证，存在 $j (1 \leqslant j \leqslant k)$ 有

$$L_\omega(x) \subset \Lambda_j$$

成立,即可. 由于 $\Lambda_j(j=1,2,\cdots,k)$是两两不交的闭子集,故可选择两两不交的开集 V_j 使

$$f(\Lambda_j) = f^{-1}(\Lambda_j) = \Lambda_j \subset V_j, \quad j = 1,2,\cdots,k$$

或

$$\Lambda_j \subset f^{-1}(V_j) \cap V_j \cap f(V_j), \quad j = 1,2,\cdots,k,$$

进而又可选取开集 U_j,满足

$$\Lambda_j \subset U_j \subset \overline{U_j} \subset f^{-1}(V_j) \cap V_j \cap f(V_j), \quad j = 1,2,\cdots,k.$$

由题设,

$$L_\omega(x) \subset L(f) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \Lambda_i \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i,$$

故存在 $N \in \mathbf{N}$,使得 $n \geqslant N$ 时,有

$$f^n(x) \in \bigcup_{i=1}^{k} U_i,$$

特别,存在 $j(1 \leqslant j \leqslant k)$,有

$$f^N(x) \in U_j.$$

于是

$$f^{N+1}(x) \in (\bigcup_{i=1}^{k} U_i) \cap V_j = U_j,$$

归纳可证

$$f^n(x) \in U_j, \quad \forall n \geqslant N.$$

从而

$$L_\omega(x) \subset (\bigcup_{i=1}^{k} \Lambda_i) \cap \overline{U_j} = \Lambda_j,$$

故第一个等号成立;类似可证第二个等号. □

定义 10.3.2 设 $\Lambda_j(j=1,2,\cdots,k)$是紧致流形 M 中两两不交且对映射 $f \in \mathrm{Homeo}(M)$不变的闭子集,引入关系"$>$",称

$$\Lambda_i > \Lambda_j,$$

如果

$$(W^u(\Lambda_i) \setminus \Lambda_i) \cap (W^s(\Lambda_j) \setminus \Lambda_j) \neq \varnothing;$$

又如果存在不同的 $i_1, i_2, \cdots, i_r (r \geqslant 1)$,使得

$$\Lambda_{i_1} > \Lambda_{i_2} > \cdots > \Lambda_{i_r} > \Lambda_{i_1},$$

则称 $\Lambda_{i_1}, \Lambda_{i_2}, \cdots, \Lambda_{i_r}$形成一个环,$r$ 称为环的长度;如果 $\Lambda_j(j=1,2,\cdots,k)$中不存在任何长度的环,则称 $\Lambda_j(j=1,2,\cdots,k)$是无环的.

为下面叙述的需要,这里提及"有向图"的概念. 设 V 是一个有限集,$A \subset V \times V$,称(V, A)是一个有向图,$u, u' \in V$ 是有向图的顶点,$(u, u') \in A$ 表

示从 u 到 u' 的路径，又记为 $u \rightarrow u'$.

一个有向图(V', A')称为有向图(V, A)的子图，如果

$$V' \subset V, \quad A' \subset A \cap V \times V.$$

又称子图$(V', A|V')$是有向图(V, A)在 $V' \subset V$ 上的限制，其中

$$A|V' = A \cap (V' \times V').$$

顶点 $u \in V$ 称为有向图(V, A)的一个下极端点，如果不存在 $u' \in V$，使 $u \rightarrow u'$. 即

$$(u, u') \overline{\in} A, \forall u' \in V.$$

类似可定义上极端点. 有向图(V, A)的一个子图(V', A')称为圈，若(V', A')中既无下极端点，又无上极端点. 有向图(V, A)称为无圈的，如果不存在有圈的子图.

命题 10.3.4　如果 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_k$ 满足无环条件，那么(必要时给这些集重新编号)

$$\Lambda_i > \Lambda_j \Rightarrow i > j.$$

反之，若定义 10.3.2 中的 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_k$ 满足上述条件，则满足无环条件.

证明　后一结论是显然的，只证前一结论. 记

$$V = \{\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_k\},$$

$$A = \{(\Lambda_i, \Lambda_j) \mid 若 \Lambda_i > \Lambda_j\},$$

于是(V, A)构成一个有向图，采用图的记号

$$\Lambda_i \rightarrow \Lambda_j$$

来表示

$$\Lambda_i > \Lambda_j.$$

于是，可以断言：可用 $1, 2, \cdots, k$ 来给 V 的顶点编号，使得

$$\Lambda_i \rightarrow \Lambda_j \Rightarrow i > j.$$

事实上，首先记 $V_1 = V, A_1 = A$，置

$$E_1 = \{u \in V_1 \mid u 是(V_1, A_1)的下极端点\}.$$

设 E_1 中元素的个数为 N_1，用序号 $1, 2, \cdots, N_1$ 给 E_1 中的顶点编号. 然后，记

$$V_2 = V_1 \setminus E_1, \quad A_2 = A|V_2,$$

$$E_2 = \{u \in V_2 \mid u 是(V_2, A_2)的下极端点\}.$$

设 E_2 中元素的个数为 N_2，用序号 $N_1 + 1, N_1 + 2, \cdots, N_1 + N_2$ 给 E_2 中的顶点编号.

依次下去，直至给出 V 中所有顶点的编号，即有如上断言成立.　□

定理 10.3.1　设 $\mathscr{M}$:

$$\varnothing = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M$$

是紧致流形 M 关于映射 $f\in \text{Homeo}(M)$ 的一个滤子，则

$$K_j = K_j^f(\mathcal{M}), \quad j = 1,2,\cdots,k$$

是两两不交的 f 不变闭集，且满足无环条件.

证明 由命题 10.3.1 知 K_j 是两两不交的 f 不变闭集，并且

$$K_i \subset \text{int}M_i,$$

于是存在 $\delta>0$，使

$$d(M \setminus \text{int}M_i, K_i) \geqslant \delta.$$

又由

$$f(\text{int}M_i) \subset f(M_i) \subset \text{int}M_i,$$

有

$$f^{-1}(M \setminus \text{int}M_i) \subset M \setminus \text{int}M_i.$$

如果 $y\in M \setminus \text{int}M_i$，由上式应有

$$f^{-n}(y) \in M \setminus \text{int}M_i,$$

故

$$d(f^{-n}(y), K_i) \geqslant \delta, \quad \forall\, n \in \mathbf{N},$$

于是

$$W^u(K_i) \subset \text{int}M_i \subset M_i. \tag{10.3.8}$$

另一方面，由 K_j 的定义，有

$$K_j \subset M_j \setminus M_{j-1} \subset M \setminus M_{j-1},$$

于是存在 $\delta>0$，使

$$d(M_{j-1}, K_j) \geqslant \delta.$$

又由

$$f(M_{j-1}) \subset \text{int}M_{j-1} \subset M_{j-1},$$

类似(10.3.8)的证明，有

$$W^s(K_j) \subset M \setminus M_{j-1}. \tag{10.3.9}$$

如果

$$K_i \succ K_j,$$

即

$$(W^u(K_i) \setminus K_i) \cap (W^s(K_j) \setminus K_j) \neq \varnothing,$$

由(10.3.8)和(10.3.9)，有

$$M_i \setminus M_{j-1} = M_i \cap (M \setminus M_{j-1}) \supset (W^u(K_i)) \cap (W^s(K_j)) \neq \varnothing,$$

而 $\mathcal{M}$ 是滤子，应有

$$i \geqslant j.$$

下证 $i \neq j$. 否则, $K_i > K_i$. 另一方面有

$$K_i \subset W^u(K_i) \cap W^s(K_i) \subset M_i \setminus M_{i-1},$$

由此易知

$$W^u(K_i) \cap W^s(K_i) = K_i,$$

与 $K_i > K_i$ 矛盾. 因此

$$K_i > K_j \Rightarrow i > j,$$

由命题 10.3.4, $K_1, K_2, \cdots, K_k$ 满足 无环条件. □

下面设两两不交的紧致不变集 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_k$ 满足无环条件, 并且按命题 10.3.4 的要求对其编号, 以满足

$$\Lambda_i > \Lambda_j \Rightarrow i > j.$$

定理 10.3.2 设 M 是紧致流形, 集列 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_k$ 是 M 中两两不交且对 $f \in \mathrm{Homeo}(M)$ 不变的紧子集, 满足无环条件, 如果

$$L(f) \subset \bigcup_{j=1}^{k} \Lambda_j,$$

则存在 M 关于 f 的滤子

$$\mathscr{M}: \quad \varnothing = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M,$$

满足

$$K_j = \Lambda_j, \quad j = 1, 2, \cdots, k,$$

其中 $K_j = K_j^f(\mathscr{M})$.

为证明定理 10.3.2, 先引入如下引理.

引理 10.3.1 在定理 10.3.2 的条件下, 如果 $i \neq j$, 则

$$\overline{W^u(\Lambda_i)} \cap W^u(\Lambda_j) \neq \varnothing \Rightarrow i > j.$$

证明 step1 证

$$\overline{W^u(\Lambda_i)} \cap \Lambda_j \neq \varnothing.$$

事实上, 由题设可取

$$x \in \overline{W^u(\Lambda_i)} \cap W^u(\Lambda_j).$$

再由 $W^u(\Lambda_i)$ 的 f 不变性和(10.3.7)式, 有

$$L_\alpha(x) \subset \overline{W^u(\Lambda_i)}$$

和

$$L_\alpha(x) \subset \Lambda_j,$$

故所证成立.

step2 证

$$\overline{W^u(\Lambda_i)} \cap (W^s(\Lambda_j) \setminus \Lambda_j) \neq \varnothing.$$

事实上, 如命题 10.3.3 的证明, 可取两两不交的开集 $U_j \supset \Lambda_j (j = 1, \cdots,$

k)，当 $i\neq j$ 时，使

$$f(U_i)\cap U_j=\varnothing,$$

记

$$L_j=f^{-1}(\overline{U_j})\setminus U_j,$$

显然

$$L_i\cap\Lambda_i=\varnothing.$$

由 step1 所证，存在 $W^u(\Lambda_i)$ 中的序列 $\{x_n\}$，使

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x\in\Lambda_j\subset U_j,$$

不妨设 $\{x_n\}\subset U_j$. 对于任意给定的 n, $x_n\in W^u(\Lambda_i)$，即

$$d(f^{-m}(x_n),\Lambda_i)\to 0,\quad m\to+\infty;$$

而 $\Lambda_i\subset M\setminus\overline{U_j}$，故可取

$$m_n=\min\{m\in\mathbf{N}\mid f^{-m}(x_n)\in M\setminus\overline{U_j}\},$$

于是

$$f^{-m_n}(x_n)\in f^{-1}(\overline{U_j})\setminus U_j=L_j,\quad\forall n\in\mathbf{N}.$$

由于 L_j 的紧致性，故 $\{f^{-m_n}(x_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ 存在收敛子列，不妨就设为

$$f^{-m_n}(x_n)\to y\in L_j,\quad n\to+\infty.$$

考虑到

$$\{x_n\}\subset W^u(\Lambda_i),$$

所以

$$y\in\overline{W^u(\Lambda_i)}\setminus\Lambda_j.$$

另一方面，可以断言

$$f^p(y)\in\overline{U_j},\quad\forall p\in\mathbf{N}.$$

若其不然，存在 $q\in\mathbf{N}$ 使得

$$f^q(y)\in M\setminus\overline{U_j}$$

取充分大的 n 使 $m_n-q>0$，而

$$f^{-(m_n-q)}(x_n)=f^q(f^{-m_n}(x_n))\in M\setminus\overline{U_j}$$

与 m_n 的最小性矛盾，故所述断言成立. 于是 $\{f^p(y)\}_{p\in\mathbf{N}}$ 在紧集 $\overline{U_j}$ 中有收敛子列，其极限点

$$z\in\overline{U_j}.$$

由 U_j 取法的任意性

$$z\in\bigcap_{U_j}\overline{U_j}=\Lambda_j,$$

即 $L_\omega(y)\subset\Lambda_j$. 由(10.3.6)式得

$$y\in W^s(\Lambda_j).$$

联合前证，存在

$$y \in \overline{W^u(\Lambda_i)} \cap (W^s(\Lambda_j) \setminus \Lambda_j),$$

故所证成立.

step3　证

$$i > j.$$

事实上，由 step2 所证，存在

$$x_1 \in \overline{W^u(\Lambda_i)} \cap (W^s(\Lambda_j) \setminus \Lambda_j).$$

有 $x_1 \in \Lambda_i$. 又由 $x_1 \in M$ 及命题 10.3.3，存在 $t_1(1 \leqslant t_1 \leqslant k)$ 使

$$x_1 \in W^u(\Lambda_{t_1}).$$

显然 $x_1 \overline{\in} \Lambda_{t_1}$. 由无环条件可得

$$t_1 > j.$$

如果 $i = t_1$，则结论成立；否则，由

$$\overline{W^u(\Lambda_i)} \cap W^u(\Lambda_{t_1}) \neq \varnothing,$$

援引前证，存在 $t_2(1 \leqslant t_2 \leqslant k)$ 使

$$i \geqslant t_2 > t_1 > j.$$

如此经过有限步，总可知所证成立. □

引理 10.3.2　在定理 10.3.2 条件下，有

(1) $\bigcup_{j \leqslant i} W^s(\Lambda_j)$ 是闭集 $\bigcup_{j \leqslant i} W^u(\Lambda_j)$ 的开邻域.

(2) $\bigcup_{j \geqslant i} W^u(\Lambda_j)$ 是闭集 $\bigcup_{j \geqslant i} W^s(\Lambda_j)$ 的开邻域.

证明　首先证 $\bigcup_{j \leqslant i} W^u(\Lambda_j)$ 是闭集. 由命题 10.3.3，有

$$\overline{W^u(\Lambda_i)} \subset M = \bigcup_{j=1}^{k} W^u(\Lambda_j).$$

注意到引理 10.3.1，当 $j > i$ 时，

$$\overline{W^u(\Lambda_i)} \cap W^u(\Lambda_j) = \varnothing,$$

从而

$$\overline{W^u(\Lambda_i)} \subset \bigcup_{j \leqslant i} W^u(\Lambda_j),$$

于是

$$\overline{\bigcup_{j \leqslant i} W^u(\Lambda_j)} \subset \bigcup_{j \leqslant i} W^u(\Lambda_j),$$

故所证成立. 而

$$\bigcup_{j \geqslant i} W^u(\Lambda_j) = M \setminus \bigcup_{j \leqslant i-1} W^u(\Lambda_j)$$

是开集.

在以上证明中，以 f^{-1} 代替 f，并将 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_k$ 的排列次序颠倒为 $\Lambda_k, \Lambda_{k-1}, \cdots, \Lambda_1$，可证 $\bigcup_{j \geqslant i} W^s(\Lambda_j)$ 是闭集，而 $\bigcup_{j \leqslant i} W^s(\Lambda_j)$ 是开集.

然后证结论(1)的其余部分. 由

$$\bigcup_{j\leqslant i} W^u(\Lambda_j) \subset M = \bigcup_{p=1}^{k} W^s(\Lambda_p),$$

及无环条件, 当 $p > i \geqslant j$ 时

$$W^u(\Lambda_j) \cap W^s(\Lambda_p) = \varnothing.$$

从而

$$\bigcup_{j\leqslant i} W^u(\Lambda_j) \subset \bigcup_{j\leqslant i} W^s(\Lambda_j).$$

类似可证结论(2)的其余部分. □

引理 10.3.3 在定理 10.3.2 的条件下, 存在 M 关于 f 的滤子

$$\mathscr{M}:\quad \varnothing = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M,$$

满足

$$\bigcup_{j\leqslant i} W^u(\Lambda_j) \subset \operatorname{int} M_i \subset M_i \subset \bigcup_{j\leqslant i} W^s(\Lambda_j). \tag{10.3.10}$$

证明 step1 由于紧空间的闭子集必是紧集, 由引理 10.3.2, $\bigcup_{j\leqslant i} W^s(\Lambda_j)$ 是紧集 $\bigcup_{j\leqslant i} W^u(\Lambda_j)$ 的开邻域, 故必定存在紧集 Q_i 满足

$$\bigcup_{j\leqslant i} W^u(\Lambda_j) \subset \operatorname{int} Q_i \subset Q_i \subset \bigcup_{j\leqslant i} W^s(\Lambda_j) \tag{10.3.11}$$

可以断言,

$$\bigcup_{j\leqslant i} W^u(\Lambda_j) = \bigcap_{n\geqslant 0} f^n(Q_i). \tag{10.3.12}$$

事实上, 由 $W^u(\Lambda_j)$ 的 f 不变性, 有

$$\bigcup_{j\leqslant i} W^u(\Lambda_j) \subset \bigcap_{n\geqslant 0} f^n(Q_i).$$

另一方面, 若

$$x \in \bigcap_{n\geqslant 0} f^n(Q_i),$$

即

$$f^{-n}(x) \in Q_i \subset \bigcup_{j\leqslant i} W^s(\Lambda_j), \quad \forall\, n \geqslant 0.$$

易证

$$L_\alpha(x) \subset \bigcup_{j\leqslant i} W^s(\Lambda_j).$$

同时, 由命题 10.3.3

$$x \in M = \bigcup_{j=1}^{k} W^u(\Lambda_j),$$

故存在 $p(1 \leqslant p \leqslant k)$, 有

$$x \in W^u(\Lambda_p),$$

利用(10.3.7), 得

$$L_\alpha(x) \subset \Lambda_p.$$

从而

$$\varnothing \neq L_\alpha(x) \subset \bigcup_{j\leqslant i} W^s(\Lambda_j) \cap \Lambda_p.$$

注意到，$p\neq j$ 时，

$$W^s(\Lambda_j) \cap \Lambda_p = \varnothing,$$

故

$$1 \leqslant p \leqslant i,$$

因此

$$x \in W^u(\Lambda_p) \subset \bigcup_{j\leqslant i} W^u(\Lambda_j).$$

联合前证，有断言(10.3.12)式成立.

step2　证存在紧集 V_i 使

(a1) $\bigcup_{j\leqslant i} W^u(\Lambda_j) \subset \operatorname{int} V_i \subset V_i \subset \bigcup_{j\leqslant i} W^s(\Lambda_j)$.

(a2) $f(V_i) \subset \operatorname{int} V_i$.

事实上，对给定的 i，置

$$A_r = \bigcap_{n=0}^{r} f^n(Q_i),$$

是紧集，显然 $A_r \supset A_{r+1}$，$r=0,1,2,\cdots$. 由于

$$A_{r+1} = \bigcap_{n=0}^{r+1} f^n(Q_i) = Q_i \cap \left(\bigcap_{n=1}^{r+1} f^n(Q_i)\right) = f(A_r),$$

故

$$f(A_r) \subset A_r, \quad r = 0,1,2,\cdots. \tag{10.3.13}$$

同时，由(10.3.11)和(10.3.12)式，有

$$\bigcap_{n\geqslant 0} f^n(Q_i) = \bigcup_{j\leqslant i} W^u(\Lambda_j) \subset \operatorname{int} Q_i,$$

因而存在 $r\geqslant 0$ 使

$$A_r \subset \operatorname{int} Q_i,$$

并且，由 $W^u(\Lambda_j)$的 f 不变性，及(10.3.11)式，有

$$\bigcap_{n\geqslant 0} f^n(Q_i) = \bigcup_{j\leqslant i} W^u(\Lambda_j) = \bigcap_{m=0}^{r} f^m\left(\bigcup_{j\leqslant i} W^u(\Lambda_j)\right)$$

$$\subset \bigcap_{m=0}^{r} f^m(\operatorname{int} Q_i) = \operatorname{int} A_r,$$

所以，存在 $r\geqslant 0$ 使

$$\bigcap_{n\geqslant 0} f^n(Q_i) \subset \operatorname{int} A_r \subset A_r \subset \operatorname{int} Q_i. \tag{10.3.14}$$

再由(10.3.13)，归纳可证

$$f^{n+1}(A_r) \subset f^n(A_r), \quad n = 1,2,\cdots,$$

且由(10.3.14)有

$$\bigcap_{n\geqslant 0} f^n(A_r) = \bigcap_{n\geqslant 0} f^n(Q_i) \subset \operatorname{int} A_r,$$

故存在 $n\in \mathbf{N}$ 使得

$$f^n(A_r) \subset \operatorname{int}A_r.$$

对取得的 r,记

$$A = A_r.$$

综合前证,A 满足

(b1) $\bigcap_{n\geq 0} f^n(Q_i) \subset \operatorname{int}A \subset A \subset \operatorname{int}Q_i$.

(b2) $f(A) \subset A$.

(b3)存在 $n \in \mathbf{N}$,使得

$$f^n(A) \subset \operatorname{int}A.$$

如果 $n=1$,则取 $V_i = A$,有(a1),(a2)成立.如果 $n\geq 2$,则选取 A 的紧邻域 B 满足

$$A \subset \operatorname{int}B \subset B \subset f^{-n}(\operatorname{int}A) \cap \operatorname{int}Q_i,$$

置

$$C = A \cup (B \cap f^{n-1}(B)),$$

易知 C 满足

(c1) $\bigcap_{n\geq 0} f^n(Q_i) \subset \operatorname{int}C \subset C \subset \operatorname{int}Q_i$.

(c2) $f(C) \subset C$.

(c3) $f^{n-1}(C) \subset \operatorname{int}C$.

由于 n 是一个有限的自然数,如此归纳可得满足(a1)和(a2)的 V_i.

step3 取 step2 中的紧集 V_i,置

$$M_i = \bigcup_{j\leq i} V_i, \quad i = 1,2,\cdots,k; \quad M_0 = \varnothing.$$

易证 $M_0, M_1, \cdots, M_k$ 构成满足定理要求的滤子 $\mathscr{M}$. □

定理 10.3.2 的证明 由引理 10.3.3,存在关于 f 的滤子

$$\mathscr{M}: \quad \varnothing = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M,$$

满足(10.3.10).下证

$$K_i^f(\mathscr{M}) = \Lambda_i, \quad i = 1,2,\cdots,k.$$

首先,当 $i \neq j$ 时

$$\Lambda_i \cap W^s(\Lambda_j) = \varnothing,$$

由(10.3.10)有

$$\Lambda_i \cap M_{i-1} = \varnothing,$$

于是

$$\Lambda_i \subset M_i \setminus \operatorname{int}M_{i-1},$$

所以

$$\Lambda_i \subset \bigcap_{n\in\mathbf{Z}} f^n(M_i \setminus \operatorname{int}M_{i-1}). \tag{10.3.15}$$

另一方面,由(10.3.10)中

$$\bigcup_{j\leqslant i} W^u(\Lambda_j) \subset M_i,$$

利用引理 10.3.3 中 step1 的断言(10.3.12),有

$$\bigcap_{n\geqslant 0} f^n(M_i) = \bigcup_{j\leqslant i} W^u(\Lambda_j); \tag{10.3.16}$$

同时,又由(10.3.10)式和命题 10.3.3,有

$$M \setminus \mathrm{int} M_{i-1} \subset \bigcup_{j\geqslant i} W^u(\Lambda_j)$$

或

$$\bigcap_{n\geqslant 0} f^n(M \setminus \mathrm{int} M_{i-1}) \subset \bigcup_{j\geqslant i} W^u(\Lambda_j),$$

于是,联合(10.3.16)有

$$\bigcap_{n\geqslant 0} f^n(M_i \setminus \mathrm{int} M_{i-1}) \subset W^u(\Lambda_i). \tag{10.3.17}$$

其次,由(10.3.10)中

$$M_i \subset \bigcup_{j\leqslant i} W^s(\Lambda_j)$$

有

$$\bigcap_{n\geqslant 0} f^{-n}(M_i) \subset \bigcup_{j\leqslant i} W^s(\Lambda_j); \tag{10.3.18}$$

同时,又由(10.3.10)式,有

$$\bigcup_{j\geqslant i} W^s(\Lambda_j) \subset M \setminus \mathrm{int} M_{i-1},$$

利用断言(10.3.12)可得

$$\bigcup_{j\geqslant i} W^s(\Lambda_j) = \bigcap_{n\geqslant 0} f^{-n}(M \setminus \mathrm{int} M_{i-1}),$$

于是,联合(10.3.18)有

$$\bigcap_{n\geqslant 0} f^{-n}(M_i \setminus \mathrm{int} M_{i-1}) \subset W^s(\Lambda_i). \tag{10.3.19}$$

联合(10.3.17)和(10.3.19),得

$$\bigcap_{n\in\mathbf{Z}} f^n(M_i \setminus \mathrm{int} M_{i-1}) \subset W^u(\Lambda_i) \cap W^s(\Lambda_i) = \Lambda_i.$$

结合(10.3.15),利用命题 10.3.1,得

$$K_i^f(\mathscr{M}) = \bigcap_{n\in\mathbf{Z}} f^n(M_i \setminus \mathrm{int} M_{i-1}) = \Lambda_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k. \qquad \square$$

§ 10.4 Ω 稳定性定理

设 M 是紧致光滑的 Riemann 流形,$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$满足公理 A,则由定理 10.2.1,存在谱分解 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_k$. 如果基本集 $\Omega_j (j = 1, 2, \cdots, k)$满足无环条件,则称 f 满足无环条件.

定理 10.4.1 如果紧致光滑 Riemann 流形 M 上的映射 $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$满足公理 A 和无环条件,那么 f 是 Ω 稳定的.

证明 设 f 满足公理 A,由定理 10.2.1,则 $\Omega(f)$存在谱分解

$$\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_k,$$

其中,基本集 $\Omega_j (j = 1, 2, \cdots, k)$ 是两两不交且关于 f 不变的闭子集,使得

$$\Omega(f) = \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j,$$

又当 f 限制在 Ω_j 上时, $f|\Omega_j$ 是拓扑传递的, $j = 1, 2, \cdots, k$. 按题设,基本集满足无环条件,由命题 10.3.4,不妨设

$$\Omega_i > \Omega_j \Rightarrow i > j.$$

显然

$$L(f) \subset \Omega(f) = \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j.$$

按定理 10.3.2,存在 M 关于 f 的滤子

$$\mathcal{M}: \quad \varnothing = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M$$

满足

$$K_i^f(\mathcal{M}) = \Omega_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k. \tag{10.4.1}$$

记 $U_i = M_i \setminus \mathrm{int} M_{i-1}$,由命题 10.3.1,有

$$\Omega_i = K_i^f(\mathcal{M}) = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(U_i),$$

并且 U_i 是 Ω_i 的紧邻域,由定义可知 Ω_i 是 f 在 U_i 中的局部极大集.

于是,由定理 9.5.3,极大双曲集的结构稳定性, $f|\Omega_i$ 在 Ω_i 上是结构稳定的,即对任意的 $\beta > 0$,存在 $f|\Omega_i$ 在 $C^1(U_i, M)$ 中的邻域 $\mathcal{U}_f^{(i)}$,对任意的 $g \in \mathcal{U}_f^{(i)}$,存在 Ω_i 的紧邻域 $V_i \subset U_i$ 和同胚

$$h_i: \Omega_i \to \Delta_i = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} g^n(V_i) \tag{10.4.2}$$

满足

(1) $h_i \circ f|\Omega_i = g \circ h_i$,

(2) $P(h_i, id|\Omega_i) < \beta$,

其中, Δ_i 是 g 在 V_i 中的局部极大双曲不变集.

记 $g \in \mathcal{U}_f^{(i)}$ 在 U_i 中的非游荡点集为 $\Omega_i(g)$,下证

$$\Omega_i(g) = \Delta_i. \tag{10.4.3}$$

事实上,对适当选取的 $\mathcal{U}_f^{(i)}$,可使

$$f(M_i) \subset \mathrm{int} M_i \Rightarrow g(M_i) \subset \mathrm{int} M_i, \quad \forall g \in \mathcal{U}_f^{(i)},$$

故 $\mathcal{M}$ 也是 g 的滤子;并且由(10.4.1),有

$$K_i^f(\mathcal{M}) = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(M_i \setminus \mathrm{int} M_{i-1}) \subset V_i,$$

易证

$$K_i^g(\mathcal{M}) = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} g^n(M_i \setminus \mathrm{int} M_{i-1}) \subset V_i,$$

于是,由(10.4.2)可证

$$K_i^g(\mathcal{M}) \subset \Delta_i .$$

又由 $V_i \subset U_i$，有

$$\Delta_i = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} g^n(V_i) \subset \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} g^n(U_i) = K_i^g(\mathcal{M}),$$

于是

$$K_i^g(\mathcal{M}) = \Delta_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, k .$$

注意到命题 10.3.2，有

$$\Omega_i(g) = \Omega(g) \cap (M_i \setminus M_{i-1}) = \Omega(g) \cap K_i^g(\mathcal{M}) = \Omega(g) \cap \Delta_i ;$$

另一方面，Ω_i 互相隔离，即

$$\Omega_i \subset \operatorname{int} M_i \setminus M_{i-1},$$

又由 $\overline{\operatorname{Per}(f)} = \Omega(f)$，有

$$\begin{aligned} \Delta_i = h_i(\Omega_i) &= h_i(\overline{\operatorname{Per}(f) \cap \Omega_i}) \\ &\subset \overline{h_i(\operatorname{Per}(f) \cap \Omega_i)} \subset \overline{\operatorname{Per}(g)} \subset \Omega(g), \end{aligned}$$

因而

$$\Delta_i = \Omega(g) \cap \Delta_i = \Omega_i(g),$$

即(10.4.3)成立. 下面，置

$$\mathcal{U}_f = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{U}_f^{(i)}$$

对任何 $g \in \mathcal{U}_f$，由上述讨论，存在同胚

$$h_i : \Omega_i(f) \to \Omega_i(g),$$

使得

$$h_i \circ f | \Omega_i(f) = g \circ h_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k .$$

定义同胚

$$h : \Omega(f) \to \Omega(g)$$

为

$$h | \Omega_i(f) = h_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k .$$

于是

$$h \circ f|_{\Omega(f)} = g \circ h,$$

且易证

$$P(h, id|_{\Omega(f)}) < \beta,$$

即 f 是 Ω 稳定的. □

注 10.4.1　利用伪轨跟踪定理，可以证明满足公理 A 的微分同胚不存在长度为 1 的环，即自然满足

$$W^u(\Omega_i) \cap W^s(\Omega_i) = \Omega_i, \quad i = 1, \cdots, k .$$

于是 Ω 稳定性定理可以叙述如下：

设光滑紧致 Riemann 流形上的微分同胚 $f\in \mathrm{Diff}^1(M)$满足公理 A,其谱分解的全体基本集 $\Omega_1,\cdots,\Omega_k$ 如果不存在两两不同的 $i_1,i_2,\cdots,i_r(r>1)$,使

$$W^u(\Omega_{i_t})\cap W^s(\Omega_{i_{t+1}})\neq\varnothing,\quad t=1,\cdots,r,\ i_{r+1}=i_1,$$

那么 f 是 Ω 稳定的.

注 10.4.2 定理 10.4.1 中的无环条件是不可去的.如果 f 为 Ω 稳定的,则 f 具有无环性(Palis).事实上,可以举出一个二维微分同胚的例子,能产生所谓"Ω 爆炸"现象,在有环条件下不能是 Ω 稳定的.详叙可见相关文献.

下面讨论 Ω 稳定性的一个简单特例,设 M 是紧致度量空间,映射 $f\in \mathrm{Homeo}(M)$.在第四章中,给出了 M 上映射 f 的链回归集 $R(f)$.称 $x\in R(f)$,若 $x\in M$ 且对任意的 $\varepsilon>0$ 都存在过点 x 的周期的 ε 伪轨.

定理 10.4.2 如果 f 在 $R(f)$上具有双曲构造,那么成立:

(1)f 满足公理 A 且 $\Omega(f)=R(f)$.

(2)f 满足无环条件.

(3)从而,f 是 Ω 稳定的.

证明 首先证结论(1) 只须证

$$R(f)\subset\overline{\mathrm{Per}(f)}\tag{10.4.4}$$

成立即可.事实上,若上式成立,则由

$$\Omega(f)\subset R(f)\subset\overline{\mathrm{Per}(f)}\subset\Omega(f),$$

有

$$\Omega(f)=\overline{\mathrm{Per}(f)}=R(f)$$

是双曲的,即 f 满足公理 A.下证(10.4.4).

记 $\Lambda=R(f)$,取 Λ 的开邻域 $U(\Lambda)$和常数 $\beta_0>0$ 如定理 9.2.1 所述,于是在定理 9.3.1 的证明中指出,若点 $y_1,y_2\in M$ 满足

$$\{\mathrm{Orb}_f(y_1)\cup \mathrm{Orb}_f(y_2)\}\subset U(\Lambda),$$

且

$$d(f^n(y_1),f^n(y_2))<\beta_0,\quad \forall n\in\mathbf{Z},$$

则

$$y_1=y_2.$$

由定理 9.2.2,又取 α 和 β 满足

$$0<\alpha<\beta<\beta_0/2,$$

使得对双曲集 Λ 中任意的 α 伪轨,都存在 $U(\Lambda)$中的轨道对其 β 跟踪.

由定理 4.2.5,任取

$$x\in R(f)=R(f|R(f)),$$

则存在过 x 点的不妨设其周期为 p 的 α 伪轨 $\{x_j\}\subset R(f)$.于是存在过 y 点

的轨迹 $\mathrm{Orb}_f(y)\subset U(\Lambda)$ 对其 β 跟踪. 显然, 由 $x_{n+p}=x_n$, 有

$$d(f^{n+p}(y),f^n(y))\leqslant d(f^{n+p}(y),x_{n+p})+d(x_n,f^n(y))\leqslant 2\beta<\beta_0,$$

故

$$f^p(y)=y,$$

即

$$y\in \mathrm{Per}(f).$$

由上述讨论可知, 对任意的 $x\in R(f)$ 及任意的 $0<\beta<\beta_0/2$, 都存在 $y\in \mathrm{Per}(f)$ 使得

$$d(x,y)<\beta,$$

即(10.4.4)式成立.

再证结论(2)　若其不然, 存在 $\Omega(f)=R(f)$ 的基本集组成的环:

$$\Omega_1>\Omega_2>\cdots>\Omega_r>\Omega_{r+1}=\Omega_1,$$

于是存在

$$q_i\in W^u(\Omega_i)\cap W^s(\Omega_{i+1}),\quad i=1,2,\cdots,r.$$

从而, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在充分大的 $m\in\mathbf{N}$, 使得

$$d(f^{-m}(q_i),\Omega_i)<\frac{\varepsilon}{2},\quad d(f^m(q_i),\Omega_{i+1})<\frac{\varepsilon}{2},\quad i=1,2,\cdots,r.$$

易证存在 $p_i\in\Omega_i$ 和 $k_i\in\mathbf{N}$, 使得

$$d(p_1,f^m(q_r))<\varepsilon,$$

$$d(p_i,f^m(q_{i-1}))<\varepsilon,\quad i=2,\cdots,r,$$

$$d(f^{k_i}(p_i),f^{-m}(q_i))<\varepsilon,\quad i=1,\cdots,r,$$

其中, 前两式显然成立; 第三式由结论(1)知周期点的稠密性而可证. 于是, 以下有限点列生成一个 周期的 ε 伪轨:

$$p_1,\cdots,f^{k_1}(p_1);f^{-m}(q_1),\cdots,q_1,\cdots,f^m(q_1);$$

$$p_2,\cdots,f^{k_2}(p_2);f^{-m}(q_2),\cdots,q_2,\cdots,f^m(q_2);$$

$$\cdots$$

$$p_r,\cdots,f^{k_r}(p_r);f^{-m}(q_r),\cdots,q_r,\cdots,f^m(q_r).$$

从而, 对任给的 $\varepsilon>0$, 都存在过点 q_i 的周期的 ε 伪轨, 即

$$q_i\in R(f)=\Omega(f),\quad i=1,2,\cdots,r,$$

这与 q_i 的选取矛盾, 故 f 满足无环条件.

最后, 由结论(1), (2)和定理 10.4.1 知结论(3)成立.　□

类似于命题 10.3.2, 有如下结论.

命题 10.4.1　设

$$\mathscr{M}:\quad \varnothing=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_k=M$$

是 M 关于 f 的滤子,则 $R=R(f)$ 有如下两两不交的分解

$$R=\bigcup_{j=1}^{k}R_j$$

满足 $R_j=R\cap(M_j\setminus M_{j-1})$ 是 f 的不变集,且 $R_j=R\cap K_j^f(\mathscr{M})$. □

定理 10.4.3　如果 f 满足公理 A 和无环条件,则 $R(f)=\Omega(f)$,从而 $R(f)$ 具有双曲构造的充分必要条件是 f 满足公理 A 和无环条件.

证明　由于 f 满足公理 A,由定理 10.2.1,$\Omega=\Omega(f)$ 存在基本集分解

$$\Omega=\bigcup_{j=1}^{k}\Omega_j$$

再由无环条件和定理 10.3.2,存在滤子

$$\mathscr{M}:\quad \varnothing=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_k=M$$

满足

$$\Omega_j=K_j^f(\mathscr{M})=\bigcap_{n\in\mathbf{Z}}f^n(M_j\setminus M_{j-1}).$$

于是由命题 10.4.1,有

$$\Omega_j=\Omega\cap K_j^f(\mathscr{M})\subset R\cap K_j^f(\mathscr{M})=R_j\subset K_j^f(M)=\Omega_j,$$

即

$$\Omega_j=R_j,\quad j=1,2,\cdots,k.$$

从而

$$R(f)=\bigcup_{j=1}^{k}R_j=\bigcup_{j=1}^{k}\Omega_j=\Omega(f)$$

具有双曲构造.联系定理 10.4.2,有后一结论成立. □

类似于 Ω 稳定性的定义,可以提出 R 稳定性的概念,即:对 C^1 意义下充分接近 $f\in\mathrm{Diff}^1(M)$ 的 g,存在同胚

$$h:R(f)\to R(g)$$

使得

$$h\circ f|_{R(f)}=g\circ h,$$

则称 f 是 R 稳定的.

注意到满足公理 A 和无环条件的微分同胚组成 $\mathrm{Diff}^1(M)$ 中的开集,利用定理 10.4.3,容易得到如下 R 稳定性定理.

定理 10.4.4　设 $f\in\mathrm{Diff}^1(M)$ 且 $R(f)$ 具有双曲结构,则 f 是 R 稳定的.

第十一章 Banach空间上的动力系统

前面讲述的微分动力系统,本质上是有穷维动力系统.一个Banach空间上的算子半群,可以构成一个抽象的无穷维动力系统.本章开始涉猎这方面的内容.这里,算子半群是一个重要的工具和方法[58,129~131].

§11.1 算子半群

设 X 是Banach空间,映射 $A:D(A)\to X$ 是线性算子,$D(A)\subset X$ 是其定义域,记

$$\mathscr{L}(X)=\{A\mid A:D(A)\subset X\to X\text{ 线性且有界}\}.$$

定义 11.1.1 称 X 上的单参数算子族 $\{S(t)\mid S(t)\in\mathscr{L}(X),t\geqslant 0\}$ 为线性有界算子半群,若满足

(1) $S(0)=I$,其中 I 是 X 上的恒等算子.

(2) $S(t+\tau)=S(t)\cdot S(\tau),\ \forall\, t,\tau\geqslant 0$.

简称 $S(t)$ 是半群;如果更有

(3) $\lim\limits_{t\to 0^+}\|S(t)x-x;X\|=0,\ \forall\, x\in X$.

则称此半群为强连续半群,简称为 C^0 类半群;一个半群如果满足条件

$$\lim_{t\to 0^+}\|S(t)-I;\mathscr{L}(X)\|=0,$$

则称该半群为一致连续半群.

命题 11.1.1 设 $S(t)$ 是 C^0 类半群,若 $x\in X$,则 $S(t)x$ 对 $t\geqslant 0$ 连续.

证明 设 $t_1,t_2\geqslant 0$,记 $\alpha=\min(t_1,t_2)$,$\beta=|t_1-t_2|$,有

$$\max(t_1,t_2)=\alpha+\beta.$$

于是,由

$$\|S(t_1)x-S(t_2)x\|\leqslant\|S(\alpha)\|\cdot\|S(\beta)x-x\|$$

可证结论成立. □

命题 11.1.2 设 $S(t)$ 是 C^0 类半群,则存在 $\omega\geqslant 0$ 和 $M\geqslant 1$,使得

$$\|S(t);\mathscr{L}(x)\|\leqslant Me^{\omega t},\quad \forall\, 0\leqslant t<+\infty. \tag{11.1.1}$$

证明 如果存在 $\eta>0$ 和 $M\geqslant 1$ 使

$$\|S(t)\|\leqslant M,\quad 0\leqslant t\leqslant\eta \tag{11.1.2}$$

成立,则对任意 $t\geqslant 0$,有 $t=n\eta+\delta$,$n\in\mathbf{Z}_+$,$0\leqslant\delta<\eta$,有

$$\| S(t) \| = \| S(n\eta + \delta) \| = \| S^n(\eta)S(\delta) \| \leqslant M \cdot M^{t/\eta},$$

令 $\omega = \eta^{-1}\ln M$，有结论成立. 故只须证(11.1.2). 若其不然，存在序列 $\{t_n\}$，$t_n \geqslant 0$ 且 $t_n \to 0(n \to +\infty)$，使

$$\| S(t_n) \| \geqslant n.$$

由共鸣定理[10]，存在 $x \in X$ 使 $\| S(t_n)x \|$ 无界，与 $S(t)$ 是 C^0 类半群矛盾，故(11.1.3)式成立. □

定义 11.1.2 若 C^0 类半群 $S(t)$ 在(11.1.1)中有 $M = 1$，$\omega = 0$，则称 $S(t)$ 为 C^0 类压缩半群；若仅有 $\omega = 0$，则称 $S(t)$ 为 C^0 类一致有界半群.

下面介绍无穷小生成元的概念. 记 A 的定义域为 $D(A)$.

定义 11.1.3 称算子 A 是半群 $\{S(t) \mid t \geqslant 0\}$ 的无穷的生成元，如果

$$D(A) = \left\{ u \in X \mid \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ 存在} \right\}, \tag{11.1.3}$$

$$Au = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} = \frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}(S(t)u)\big|_{t=0}, \quad \forall u \in D(A).$$

显然，无穷小生成元是线性算子，但不一定是有界算子.

命题 11.1.3 对任一 $A \in \mathscr{L}(X)$，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} A^n/n!$ 在 $\mathscr{L}(X)$ 中收敛，记为 $\mathrm{Exp}(A)$，映射

$$S: t \to \mathrm{Exp}(tA), \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

无穷次可微，且成立

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t) = A \cdot S(t) = S(t) \cdot A, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$

(2) 当 $A_1, A_2 \in \mathscr{L}(X)$ 可换，即 $A_1 \cdot A_2 = A_2 \cdot A_1$ 时，有

$$\mathrm{Exp}(A_1 + A_2) = \mathrm{Exp}(A_1) \cdot \mathrm{Exp}(A_2).$$

从而 $\{S(t) \mid t \geqslant 0\}$ 构成 C^0 类半群并以 A 为其无穷小生成元.

证明 设 $A \in \mathscr{L}(X)$，注意到

$$\left\| \sum_{n=0}^{m} A^n/n! \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{m} \| A \|^n/n! \to \exp(\| A \|),$$

易知 $\sum_{n=0}^{\infty} A^n/n!$ 在 $\mathscr{L}(X)$ 中收敛，故

$$S(t) = \mathrm{Exp}(tA) \in \mathscr{L}(X).$$

由此可证结论(2). 显然

$$S(0) = \mathrm{Exp}(0) = I,$$

$$S(t + \tau) = \mathrm{Exp}((t + \tau)A) = \mathrm{Exp}(tA) \cdot \mathrm{Exp}(\tau A) = S(t) \cdot S(\tau)$$

即 $\{S(t) \mid t \geqslant 0\}$ 是有界线性算子半群. 又因

$$\| S(t) - I \| = \| \mathrm{Exp}(tA) - I \| \leqslant |t| \, \| A \| \mathrm{e}^{t\|A\|}, \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

知$\{S(t)|t\geqslant 0\}$是一致连续半群,也是 C^0 类半群.

注意到,存在常数 $c>0$ 使

$$\left\| \frac{S(t)-I}{t} - A \right\| \leqslant c|t|e^{t\|A\|},$$

易知$S(t)$在$t=0$点处可导且结论(1)成立.于是,利用半群性质和命题11.1.2可证结论(1)对任意 $t\in\mathbf{R}$ 成立.

由结论(1),知 A 是$S(t)$的无穷小生成元. □

命题 11.1.4　设 A 是C^0 类半群 $S(t)$的无穷小生成元,那么成立

(1) 对 $u\in X, t\geqslant 0$,有$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}S(\tau)u\mathrm{d}\tau = S(t)u$.

(2)对 $u\in X, t\geqslant 0$, 有$\int_0^t S(\tau)u\mathrm{d}\tau\in D(A)$ 且

$$A\left(\int_0^t S(\tau)\mathrm{d}\tau\right) = S(t)u-u.$$

(3)对 $u\in D(A), t\geqslant 0$　有 $S(t)u\in D(A)$且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S(t)u) = AS(t)u = S(t)Au.$$

(4)对 $u\in D(A), t, r\geqslant 0$　有

$$S(t)u-S(r)u = \int_r^t S(\tau)Au\mathrm{d}\tau = \int_r^t AS(\tau)u\mathrm{d}\tau.$$

证明　证(1)　由下式及命题 11.1.1 可证(1)成立,

$$\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}S(\tau)u\mathrm{d}\tau - S(t)u\right\| \leqslant \left|\frac{1}{h}\right|\left|\int_t^{t+h}\|S(\tau)u-S(t)u\|\mathrm{d}\tau\right|.$$

证(2)　由下式并令 $h\to 0^+$,由结论(1)有(2)成立,

$$\frac{S(h)-I}{h}\int_0^t S(\tau)u\mathrm{d}\tau = \frac{1}{h}\int_t^{t+h}S(\tau)u\mathrm{d}\tau - \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)u\mathrm{d}\tau.$$

证(3)　首先,设 $u\in D(A), h>0$,当 $t\geqslant 0$ 时,有

$$\frac{S(t+h)u-S(t)u}{h} = \frac{S(h)-I}{h}S(t)u = S(t)\frac{S(h)u-u}{h},$$

令 $h\to 0^+$,有 $S(t)u\in D(A)$,且

$$\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}(S(t)u) = AS(t)u = S(t)Au,\quad t>0.$$

其次,又由

$$\left\|\frac{S(t)-S(t-h)}{h}u - S(t)Au\right\|$$

$$\leqslant M\left\|\frac{S(h)u-u}{h}-Au\right\| + \|S(t-h)Au - S(t)Au\| \to 0, (h\to 0^+),$$

有

$$\frac{\mathrm{d}^-}{\mathrm{d}t}(S(t)u) = S(t)Au,$$

从而,结论(3)成立.

证(4) 由结论(3),从 r 到 t 积分即可. □

命题 11.1.5 设 A 是 C^0 类半群 $S(t)$ 的无穷小生成元,则 $D(A)$ 在 X 中稠且 A 是闭线性算子.

证明 首先,对任一 $u \in X$,置

$$w(t) = \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau, \quad \forall\, t \geqslant 0,$$

由命题 11.1.4 的结论(2),有 $w(t) \in D(A)$, $\forall\, t \geqslant 0$;再由其结论(1),有 $w(t) \to u\ (t \to 0^+)$,故 $D(A)$ 在 X 中稠.

其次,A 显然是线性算子.又取序列 $\{u_n\} \in D(A)$,使其在 X 中有

$$u_n \to u \text{ 且 } Au_n \to w, \quad n \to +\infty,$$

由上一命题(4),

$$S(t)u_n - u_n = \int_0^t S(\tau)Au_n\,\mathrm{d}\tau,$$

其中,右端被积函数在有限区间上是一致收敛的,故当 $n \to \infty$ 时,有

$$S(t)u - u = \int_0^t S(\tau)w\,\mathrm{d}\tau,$$

两端同除以 t,令 $t \to 0^+$,知 $u \in D(A)$ 且 $Au = w$,故 A 是闭算子[10]. □

命题 11.1.6 设 A 和 B 分别是 C^0 类半群 $S(t)$ 和 $T(t)$ 的无穷小生成元,若 $A = B$ 则

$$S(t) = T(t), \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

证明 设 $A = B$,则 $D(A) = D(B)$,任取 $u \in D(A) = D(B)$,则对任给的 $t > 0$,有 $S(t)u \in D(A)$, $T(t)u \in D(B)$,并由 Leibnitz 公式,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[T(t-\tau)S(\tau)u] = -T(t-\tau)BS(\tau)u + T(t-\tau)AS(\tau)u = 0,$$

故

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}T(t-\tau)S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau = 0,$$

即

$$T(t-\tau)S(\tau)u\,|_{\tau=t} = T(t-\tau)S(\tau)u\,|_{\tau=0},$$

得

$$S(t)\,|_{D(A)} = T(t)\,|_{D(B)}.$$

而 $D(A) = D(B)$ 在 X 中稠,故结论成立. □

压缩半群无穷小生成元的充要条件是下面给出的 Hille-Yosida 定理.

记线性算子 A 的预解集

$$\rho(A)=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid(\lambda I-A)^{-1}\text{ 存在}\},$$

如果 $\lambda\in\rho(A)$，则 $(\lambda I-A)^{-1}\in\mathcal{L}(X)$. 记

$$R(\lambda;A)=(\lambda I-A)^{-1}$$

称为算子 A 的预解式.

定理 11.1.1 (Hille-Yosida)　设线性算子 $A\in\mathcal{L}(X)$，则存在一个 C^0 类压缩半群 $S=\{S(t)\mid t\geqslant 0\}$ 使 A 为其无穷小生成元的充要条件是：

(1) A 是闭算子且 $D(A)$ 在 X 中稠.

(2) $\rho(A)\supset\mathbf{R}_+$ 且

$$\|R(\lambda;A);\mathcal{L}(X)\|\leqslant\lambda^{-1},\quad\forall\lambda>0.$$

证明　必要性　设 A 是 C^0 类压缩半群 S 的无穷小生成元，由命题 11.1.5，知条件(1)成立；下证条件(2).

step1　任给 $\lambda>0$，取 $u\in X$，定义 $R(\lambda):X\to X$ 为

$$R(\lambda)u=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}S(t)u\,dt=\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{\alpha}e^{-\lambda t}S(t)u\,dt.$$

定义是恰当的. 事实上，任给 $\varepsilon>0$，对充分大的 $\alpha,\beta>0$ 有

$$\left\|\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t}S(t)u\,dt\right\|\leqslant\frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta})\|u\|<\varepsilon,\quad\forall\lambda>0.$$

从而，$R(\lambda)u\in X$，且

$$\|R(\lambda)u\|\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\|u\|\,dt\leqslant\frac{1}{\lambda}\|u\|,\quad\forall\lambda>0.\tag{11.1.4}$$

故 $R(\lambda)\in\mathcal{L}(X)$.

step2　下面只须证

$$R(\lambda)=R(\lambda;A).\tag{11.1.5}$$

首先证 $R(\lambda)$ 是 $(\lambda I-A)$ 的右逆. 由命题 11.1.4，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to0^+}\frac{S(h)-I}{h}R(\lambda)u\\
&=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}[S(t+h)-S(t)]u\,dt\\
&=\lim_{h\to0^+}\left[\frac{1}{h}\int_h^{+\infty}e^{-\lambda t+\lambda h}S(t)u\,dt-\frac{1}{h}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}S(t)u\,dt\right]\\
&=\lim_{h\to0^+}\left[\frac{1}{h}(e^{\lambda h}-1)\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}S(t)u\,dt-\frac{1}{h}e^{\lambda h}\int_0^{h}e^{-\lambda t}S(t)u\,dt\right]\\
&=\lambda R(\lambda)u-u,\quad\forall u\in X.
\end{aligned}$$

即 $R(\lambda)u\in D(A)$ 且

$$AR(\lambda)u=\lambda R(\lambda)u-u,\quad\forall x\in X\tag{11.1.6}$$

或$(\lambda I-A)R(\lambda)=I$，在 X 上成立.

其次，任取 $u\in D(A)$，注意到 A 是闭算子，有

$$\begin{aligned}R(\lambda)Au&=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}S(t)Au\,dt\\&=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}AS(t)u\,dt\\&=A\left(\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a}e^{-\lambda t}S(t)u\,dt\right)\\&=AR(\lambda)u.\end{aligned}$$

由于 $D(A)$在 X 中稠，故上式在 X 上成立，代入(11.1.6)式，得

$$R(\lambda)Au=\lambda R(\lambda)u-u$$

或 $R(\lambda)(\lambda I-A)=I$，在 X 上成立，从而(11.1.5)式成立，且由(11.1.4)知结论(2)成立.

充分性　设 $A\in\mathscr{L}(X)$满足条件(1)和(2).任取 $\lambda>0$，则 $\lambda\in\rho(A)$，定义算子 A 的 Yosida 逼近

$$A_\lambda=\lambda AR(\lambda;A),$$

显然 $A_\lambda\in\mathscr{L}(X)$，且

$$A_\lambda=\lambda[\lambda I-(\lambda I-A)]R(\lambda;A)=\lambda^2R(\lambda;A)-\lambda I.$$

step1　证极限

$$\lim_{\lambda\to\infty}\operatorname{Exp}(tA_\lambda)u,\quad\forall u\in X,\tag{11.1.7}$$

存在.由

$$\begin{aligned}&AR(\lambda;A)-R(\lambda;A)A\\&=R(\lambda;A)[(\lambda I-A)A-A(\lambda I-A)]R(\lambda;A)=0,\end{aligned}$$

有

$$AR(\lambda;A)=R(\lambda;A)A,$$

于是，对任一 $u\in D(A)$，

$$\begin{aligned}\|A_\lambda u-Au\|&=\|\lambda AR(\lambda;A)u-Au\|\\&=\|\lambda R(\lambda;A)Au-Au\|\\&=\|R(\lambda;A)A^2u\|\\&\leqslant(\lambda-\|A\|)^{-1}\|A^2u\|\to0,\quad\lambda\to\infty,\end{aligned}$$

即

$$\lim_{\lambda\to+\infty}A_\lambda u=Au,\quad\forall u\in D(A).\tag{11.1.8}$$

由于 $D(A)$在 X 中稠密，且 A_λ 和 A 连续，故上式在 X 中成立.

另一方面，由命题 11.1.3 的(2)和本定理条件(2)，

$$\|\operatorname{Exp}(tA_\lambda)\|=\|\operatorname{Exp}[t\lambda^2R(\lambda;A)-t\lambda I]\|$$

$$\leqslant \exp(-t\lambda)\cdot \operatorname{Exp}(t\lambda^2 \| R(\lambda;A)\|)$$
$$\leqslant \exp(-t\lambda)\cdot \exp(t\lambda) = 1,\quad \forall\, t,\lambda > 0. \qquad (11.1.9)$$

于是,对任给 $\varepsilon>0$,当 $\lambda,\mu>0$ 充分大后,由(11.1.8)和(11.1.9),在 t 的一个有界域上,有

$$\begin{aligned}
&\| \operatorname{Exp}(tA_\lambda)u - \operatorname{Exp}(tA_\mu)u \| \\
&= \left\| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\operatorname{Exp}(tsA_\lambda)\operatorname{Exp}((1-s)tA_\mu)]u\,\mathrm{d}s \right\| \\
&\leqslant t\int_0^1 \| \operatorname{Exp}(tsA_\lambda)\operatorname{Exp}((1-s)tA_\mu)\| \cdot \| A_\lambda u - A_\mu u \| \,\mathrm{d}s \\
&\leqslant t\| A_\lambda u - A_\mu u \| < \varepsilon,\quad \forall\, u\in X,
\end{aligned}$$

从而,(11.1.7)成立,且在 t 的一个有界域上对 t 是一致收敛的. 定义

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \operatorname{Exp}(tA_\lambda)u = S(t)u,$$

显然 $S(t)\in\mathscr{L}(X)$,置 $S=\{S(t)\mid t\geqslant 0\}$.

step2 证 S 是 X 上 C^0 类压缩半群.

S 显然是半群. 注意到(11.1.7)对 t 的一致收敛性,

$$\lim_{t\to0^+} S(t)u = \lim_{t\to0^+}\lim_{\lambda\to+\infty} \operatorname{Exp}(tA_\lambda)u = \lim_{\lambda\to+\infty}\lim_{t\to0^+} \operatorname{Exp}(tA_\lambda)u = u,$$

即 S 是 C^0 类的. 又当 λ 充分大时,有

$$\| \operatorname{Exp}(tA_\lambda)u - S(t)u \| < \varepsilon.$$

再由(11.1.9),有

$$\| S(t)u \| = \| \operatorname{Exp}(tA_\lambda)u \| + \| \operatorname{Exp}(tA_\lambda)u - S(t)u \| \leqslant \| u \| + \varepsilon$$

或

$$\| S(t);\mathscr{L}(X) \| \leqslant 1,$$

即 $S(t)$ 是压缩的.

step3 证 A 是 S 的无穷小生成元. 仍由(11.1.7)的一致性,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to0^+} \frac{S(t)u-u}{t} &= \lim_{t\to0^+} t^{-1}[\lim_{\lambda\to+\infty} \operatorname{Exp}(tA_\lambda)u - u] \\
&= \lim_{t\to0^+} t^{-1}\left[\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^t \operatorname{Exp}(\tau A_\lambda)A_\lambda u\,\mathrm{d}\tau\right] \\
&= \lim_{t\to0^+} \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)Au\,\mathrm{d}\tau \\
&= Au,\quad \forall\, u\in D(A),
\end{aligned}$$

即满足定义 11.1.3 的第二个条件. 下面只需证(11.1.3)式. 设 B 是 S 的无穷小生成元,则(11.1.3)式右端为 $D(B)$,从而只需证

$$D(A) = D(B). \qquad (11.1.10)$$

由 $B|D(A)=A$，有

$$(I-B)D(A)=(I-A)D(A). \tag{11.1.11}$$

由于 $1\in\rho(B)\cap\rho(A)$，对任一 $w\in X$，存在 $u\in X$，使

$$(I-A)u=w. \tag{11.1.12}$$

$D(A)$在 X 中稠，故存在$\{u_n\}\subset D(A)$使 $u_n\to u,(n\to+\infty)$；而 A 是闭算子，可知 $u\in D(A)$，即(11.1.12)在 $D(A)$中有解，从而

$$X\supseteq(I-A)D(A)\supseteq X,$$

于是

$$(I-A)D(A)=X.$$

类似可证

$$(I-B)D(B)=X.$$

利用(11.1.11)，有

$$(I-B)D(B)=X=(I-A)D(A)=(I-B)D(A),$$

从而(11.1.10)成立．故 A 是S 的无穷小生成元． □

推论 11.1.1 设 A 是C^0 类压缩半群 $S=\{S(t)|t\geqslant0\}$的无穷小生成元，A_λ 是A 的 Yosida 逼近，则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\mathrm{Exp}(tA_\lambda)u=S(t)u.$$

证明 由定理 11.1.1 和命题 11.1.6 可证． □

下面讨论非压缩半群生成元的充要条件．

定理 11.1.2 存在 C_0 类半群 $S=\{S(t)|t\geqslant0\}$满足条件

$$\|S(t);\mathscr{L}(x)\|\leqslant e^{\omega t},$$

其中 $\omega\geqslant0$，使 A 是S 的无穷小生成元，当且仅当

(1)A 闭且$\overline{D(A)}=X$.

(2)$\rho(A)\supseteq\{\lambda|I_m\lambda=0,\lambda>\omega\}$且对这样的 λ，有

$$\|R(\lambda;A);\mathscr{L}(X)\|<(\lambda-\omega)^{-1}.$$

证明 设

$$T(t)=e^{-\omega t}S(t),\quad\forall t\geqslant0,$$

则

$$\|T(t)\|\leqslant e^{-\omega t}\|S(t)\|\leqslant1,$$

故 $T=\{T(t)|t\geqslant0\}$是 C^0 类压缩半群．

首先证必要性．若 A 是$S(t)$的无穷小生成元，则 $A-\omega I$ 是$T(t)$的无穷小生成元．事实上

$$(A-\omega)u=\lim_{t\to0^+}\frac{[S(t)-t\omega]u-u}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{T(t)u-u}{t}.$$

对 $A-\omega I$ 和 $T(t)$用定理 11.1.1 可核验 A 满足条件(1)和(2).

再证充分性.可核验$A-\omega I$满足定理11.1.1的条件,于是,存在C^0类可压缩半群$T=\{T(t)\mid t\geqslant 0\}$使$A-\omega I$是$T$的无穷小生成元.作$S=\{e^{\omega t}T(t)\mid t\geqslant 0\}$,则$A$是$S$的无穷小生成元.事实上

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{\omega t}T(t)u-u}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{(T(t)+t\omega T(t))u-u}{t}=Au.$$

并且

$$\|S(t)\|\leqslant e^{\omega t}\|T(t)\|\leqslant e^{\omega t},$$

故充分性成立. □

定理11.1.3 存在C^0类半群$S=\{S(t)\mid t\geqslant 0\}$使线性算子$A$是其无穷小生成元,当且仅当

(1)A闭且$\overline{D(A)}=X$,

(2)对任一$\lambda>\omega$,有$(\lambda I-A)^{-1}$存在且

$$\|(\lambda I-A)^{-n}\|\leqslant M(\lambda-\omega)^{-n},\quad n\in\mathbf{N},$$

其中$M,\omega>0$由$\|S(t)\|\leqslant M e^{\omega t}$决定.

证明 充分性的证明与定理11.1.1的证明类似,下仅证必要条件(2).

设算子A是C^0类半群S的无穷小生成元.如定理11.1.1,定义

$$R(\lambda)u=\int_0^\infty e^{-t\lambda}S(t)u\,dt,\quad \forall u\in X,$$

由命题11.1.2,有

$$\|e^{-\lambda t}S(t);\mathscr{L}(X)\|\leqslant Me^{-(\lambda-\omega)t},\quad \lambda-\omega>0,$$

知$R(\lambda):X\to X$有定义,且易证

$$R(\lambda)(\lambda I-A)u=(\lambda I-A)R(\lambda)u,\quad \forall u\in X.$$

故存在

$$(\lambda I-A)^{-1}=R(\lambda).$$

计算

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda;A)u=\frac{d}{d\lambda}R(\lambda)u=-\int_0^\infty te^{-\lambda t}S(t)u\,dt.$$

施归纳于上式,得

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda;A)u=(-1)^n\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}S(t)u\,dt. \tag{11.1.13}$$

另一方面,由

$$[R(\lambda;A)-R(\mu;A)]=(\mu-\lambda)R(\lambda;A)R(\mu;A),$$

计算

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda;A)=\lim_{\mu\to\lambda}\frac{R(\lambda;A)-R(\mu;A)}{\lambda-\mu}=-R(\lambda;A)^2.$$

施归纳于上式,得

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}R(\lambda;A) = (-1)^n n!R(\lambda;A)^{n+1}.$$

比较(11.1.13)式,得

$$R(\lambda;A)^n u = \int_0^\infty t^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}S(t)u\mathrm{d}t/(n-1)!. \qquad (11.1.14)$$

故有

$$\| R(\lambda;A)^n u \| \leqslant M\int_0^\infty t^{n-1}\mathrm{e}^{(\omega-\lambda)t}\| u \| \mathrm{d}t/(n-1)!$$
$$\leqslant M\| u \|/(\lambda-\omega)^n.$$

从而 A 满足条件(2). □

下面讨论 Hilbert 空间 H 上的增殖算子.

在 H 上给定内积$(\cdot,\cdot)$. $\mathscr{L}(H)$是 H 上全体线性连续算子构成的空间.

定义 11.1.4 称 Hilbert 空间 H 上的线性算子 A 为增殖算子,如果

$$\mathrm{Re}(Au,u)\geqslant 0, \quad \forall u\in D(A);$$

称 A 为耗散算子,如果存在 $u^*\in H$,使得

$$\mathrm{Re}(Au,u^*)\leqslant 0, \quad \forall u\in D(A);$$

称 A 为守恒算子,如果

$$\mathrm{Re}(Au,u) = 0, \quad \forall u\in D(A).$$

显然,当 A 是增殖算子时,则 $-A$ 是耗散的.

如果

$$(Au,u)>0, \quad \forall u\in D(A), u\neq 0,$$

又称 A 是正算子.显然正算子是增殖算子.

命题 11.1.7 线性算子 A 是增殖算子的充分必要条件是

$$\|(\lambda I+A)u\|\geqslant\lambda\|u\|, \quad \forall\lambda>0, u\in D(A),$$

其中 $\|\cdot\|$ 是由内积$(\cdot,\cdot)$确定的范数.

证明 首先,设 A 是增殖的,那么对任意的 $\lambda>0$ 和 $u\in D(A)$,有

$$\|(\lambda I+A)u\|\cdot\|u\|\geqslant|(\lambda u+Au,u)|$$
$$\geqslant\mathrm{Re}[(\lambda u,u)+(Au,u)]\geqslant\lambda\|u\|^2.$$

反之,由条件不等式成立,有

$$(\lambda u+Au,\lambda u+Au)\geqslant\lambda^2(u,u), \quad \forall\lambda>0, u\in D(A),$$

即

$$\lambda^2(u,u)+2\lambda(Au,u)+(Au,Au)\geqslant\lambda^2(u,u),$$

故

$$\mathrm{Re}(Au,u)\geqslant-\frac{1}{2\lambda}(Au,Au),$$

令 $\lambda\to+\infty$ 知 A 是增殖算子. □

引理 11.1.1　设 $A\in\mathscr{L}(D(A),H)$, $D(A)\subset H$, 若存在 $\mu\in\rho(A)$, 那么 $\lambda\in\rho(A)$ 的充分必要条件是存在

$$[I-(\mu-\lambda)(\mu I-A)^{-1}]^{-1}\in\mathscr{L}(H),$$

此时有

$$(\lambda I-A)^{-1}=(\mu I-A)[I-(\mu-\lambda)(\mu I-A)^{-1}]^{-1}.$$

证明　首先证充分性. 设 $B=I-(\mu-\lambda)(\mu I-A)^{-1}\in\mathscr{L}(H)$, 有

$$\begin{aligned}(\lambda I-A)(\mu I-A)^{-1}B^{-1}&=(\lambda I-A)[B(\mu I-A)]^{-1}\\&=(\lambda I-A)[(\mu I-A)-(\mu I-\lambda I)]^{-1}\\&=I.\end{aligned}$$

同样, 有

$$(\mu I-A)^{-1}B^{-1}(\lambda I-A)=I,$$

从而 $(\lambda I-A)$ 可逆. 类似可证必要性. □

定理 11.1.4[132]　线性算子 $-A:D(A)\to H$ 是 C^0 类压缩半群无穷小生成元的充要条件是

(1) $D(A)$ 在 H 中稠密.

(2) 存在 $\lambda>0$, 使 $\lambda I+A:D(A)\to H$ 是满射.

(3) A 是增殖算子.

证明　必要性　由定理 11.1.1 知条件(1)和(2)成立, 且

$$\|u\|\leqslant\|(\lambda I+A)^{-1}\|\cdot\|(\lambda I+A)u\|\leqslant\frac{1}{\lambda}\|\lambda u+Au\|$$

对 $\lambda>0$, $u\in D(A)$ 成立, 由命题 11.1.7 知 A 是增殖算子.

充分性　按定理 11.1.1 的条件进行核验.

step1　若 A 不是闭算子, 则存在 $\{u_n\}\subset D(A)$, $u_n\to0\ (n\to+\infty)$ 而 $Au_n\to\omega$, 不妨设 $\|\omega\|=1$. 由于 A 是增殖算子, 由命题 11.1.7 有

$$\left\|\left(u+\frac{1}{t}u_n\right)+tA\left(u+\frac{1}{t}u_n\right)\right\|\geqslant\left\|u+\frac{1}{t}u_n\right\|,$$

对一切 $t>0$, $u\in D(A)$ 成立. 先令 $n\to+\infty$, 再令 $t\to0^+$, 有

$$\|u+\omega\|\geqslant\|u\|,\quad\forall u\in D(A),$$

而 $D(A)$ 在 H 中稠, 故上式对 $\forall u\in H$ 成立, 特别令 $u=-\omega$, 有 $\|\omega\|=0$ 与前设矛盾, 故 A 是闭算子.

step2　证 $\rho(-A)\subset\mathbf{R}_+$ 且

$$\|R(\lambda;-A)\|_{\mathscr{L}(H)}\leqslant\lambda^{-1}.\tag{11.1.15}$$

事实上, 由命题 11.1.7 当 A 是增殖算子时, 有

$$\|(\lambda I+A)u\|\geqslant\lambda\|u\|,\quad\forall\lambda>0,u\in D(A).\tag{11.1.16}$$

从而 $\lambda I+A:D(A)\to H$ 是单射. 特别地, 再由条件(2), 应存在 $\mu>0$, 使得 μI

$+A:D(A)\to H$ 是双射. 由 step1 所证, A 是闭算子, 故

$$\rho(-A)=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid\lambda I+A:D(A)\to H\text{ 是双射}\}^{[133]},$$

从而 $\mu\in\rho(A)$. 下面只需证对任意的 $\lambda>0$, $\lambda I+A:D(A)\to H$ 是满射, 从而 $\lambda\in\rho(-A)$, 即 $\rho(-A)\supset\mathbf{R}_+$, 此时由(11.1.16)易证(11.1.15)成立.

由于 $(\mu I+A)^{-1}\in\mathscr{L}(H)$ 且 $\|(\mu I+A)^{-1}\|\leqslant\mu^{-1}$, 有

$$\|(\lambda-\mu)(\mu I+A)^{-1}\|\leqslant\frac{|\lambda-\mu|}{\mu},\quad\forall\lambda\in\mathbf{C}.$$

特别, 当 $0<\lambda<2\mu$, 即 $|\lambda-\mu|<\mu$ 时, 存在 $[I-(\lambda-\mu)(\mu I+A)^{-1}]^{-1}\in\mathscr{L}(H)$. 于是按引理 11.1.1, 归纳可证, 存在

$$(\lambda I+A)^{-1}\in\mathscr{L}(H),\quad\forall\lambda>0,$$

即 $\lambda I+A:D(A)\to H$ 是满射. □

§11.2 解析半群

命题 11.1.4 指出, 当 A 是 C^0 类半群 $S(t)$ 的无穷小生成元时, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)u$ 在 $D(A)$ 上对 $t\geqslant0$ 是存在的, 但在空间 X 上并不一定存在. 这里给出可微半群的概念, 是将上述性质推扩到一类 C^0 类半群上.

定义 11.2.1 设 $S=\{S(t)\mid t\geqslant0\}$ 是 Banach 空间 X 上的 C^0 类半群, 若对任意 $u\in X$ 及 $t>0$, 映射 $t\mapsto S(t)u$ 可微, 即存在

$$\lim_{h\to0}\frac{S(t+h)u-S(t)u}{h}\in X,$$

则称半群 S 是可微半群.

这样定义的可微是弱可微, 如果存在

$$\lim_{h\to0^+}\frac{S(t+h)-S(t)}{h}\in\mathscr{L}(X),$$

则称 $S(t)$ 在 $t>0$ 点处是强可微的, 该极限是 $S(t)$ 的导算子, 记为 $S'(t)$, 其 n 阶微商(导算子)记为 $S^{(n)}(t)$.

命题 11.2.1 设 A 是可微半群 S 的无穷小生成元, 则对 $\forall t>0$, $n\in\mathbf{N}$ 成立

(1)对任一 $u\in X$, $S(t)u$ 无穷次可微, $S(t):X\to D(A^n)$ 且

$$S^{(n)}(t)=A^nS(t):X\to X$$

是线性有界算子, 即 $S^{(n)}(t)\in\mathscr{L}(X)$.

(2)$S^{(n-1)}(t)$ 按算子范数对 $t>0$ 连续.

(3)$S^{(n)}(t)=\left(AS\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n=\left(S'\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$.

证明　施归纳于 n. 当 $n=1$ 时, 由命题 11.1.4, 有 $S(t)u\in D(A)$ 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S(t)u)=AS(t)u=AS(t)u.$$

再因 $S(t)$ 有界而 A 是闭算子, 故 $AS(t)$ 是闭的, 由闭图像定理, 有 $AS(t)\in\mathscr{L}(X)$. 下对 $n=1$ 的情况证结论(2). 设当 $0\leqslant t<1$ 时, $\|S(t);\mathscr{L}(X)\|\leqslant M_1$, 对任意的 $0<t_1\leqslant t_2\leqslant t_1+1$, 有

$$\begin{aligned}\|S(t_2)u-S(t_1)u\| &= \left\|\int_{t_1}^{t_2}AS(\tau)u\,\mathrm{d}\tau\right\| \\ &= \left\|\int_{t_1}^{t_2}S(\tau-t_1)AS(t_1)u\,\mathrm{d}\tau\right\| \\ &\leqslant (t_2-t_1)M_1\|AS(t_1)\|\cdot\|u\|\end{aligned}$$

或

$$\|S(t_2)-S(t_1);\mathscr{L}(X)\|\leqslant(t_2-t_1)M_1\|AS(t_1);\mathscr{L}(X)\|,$$

$S(t)$ 按算子范数对 $t>0$ 连续.

设命题结论对自然数 n 成立, 且任取 $t>0$, $u\in X$, 下讨论 $n+1$ 的情况.

证(1)　取 $0<\zeta<t$, 由归纳假设, 有

$$S^{(n)}(t)u=A^nS(t)u=S(t-\zeta)A^nS(\zeta)u,$$

于是 $S^{(n)}(t)u\in D(A)$, 且

$$S^{(n+1)}(t)u=AS(t-\zeta)A^nS(\zeta)u=A^{n+1}S(t)u.$$

故

$$S(t):X\to D(A^{n+1}),$$

且 $S^{n+1}(t)$ 是有界线性算子.

证(2)　设 t_1,t_2 同前, 估计

$$\begin{aligned}\|S^{(n)}(t_2)u-S^{(n)}(t_1)u)\| &= \|A^n(S(t_2)u-S(t_1)u)\| \\ &= \left\|\int_{t_1}^{t_2}S(\tau-t_1)A^{n+1}S(t_1)u\,\mathrm{d}\tau\right\| \\ &\leqslant (t_2-t_1)M_2\|u\|,\end{aligned}$$

其中 $\|S(\tau-t_1)\|\cdot\|A^{n+1}S(t_1)\|\leqslant M_2$, 可知 $S^{(n)}(t)$ 对 $t>0$ 连续.

证(3)　取 $0<\zeta\leqslant t$, 由

$$\begin{aligned}S^{(n)}(t) &= \left(AS\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n=\left(S\left(\frac{t-\zeta}{n}\right)AS\left(\frac{\zeta}{n}\right)\right)^n \\ &= S(t-\zeta)\left(AS\left(\frac{\zeta}{n}\right)\right)^n,\end{aligned}$$

得

$$S^{(n+1)}(t)=AS(t-\zeta)\left(AS\left(\frac{\zeta}{n}\right)\right)^n.$$

置 $\zeta = nt/(n+1)$，得结论(3)对 $n+1$ 成立. □

在复平面 $\mathbf{C}$ 中，记扇形区域

$$\Delta = \{z \in \mathbf{C} \mid \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\},$$

及 Δ 上的算子族

$$T = \{T(z) \mid T(z) \in \mathscr{L}(X), z \in \Delta\}.$$

定义 11.2.2 称算子族 T 为 Δ 内的解析半群，若

(1)映射 $z \mapsto T(z)$ 在 Δ 内解析.

(2) $T(0) = I$ 是恒同算子，且 $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in\Delta}} T(z)u = u$, $\forall u \in X$.

(3) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, $\forall z_1, z_2 \in \Delta$.

定义 11.2.3 X 上的 C^0 类半群 $S = \{S(t) \mid t \geqslant 0\}$ 称为实解析半群，如果对任意一个 $u \in X$，映射 $t \mapsto S(t)u$ 在 $0 < t < +\infty$ 是实解析的.

一个解析半群在非负实数轴上的限制是实解析半群，也是 C^0 类半群；反之，一个 C^0 类半群在什么条件下可扩展为 Δ 上的解析半群，这由下面的结论给出；其证明见文献[129].

引理 11.2.1 设 $S = \{S(t) \mid t \geqslant 0\}$ 是一致有界 C^0 类半群，A 是 S 的无穷小生成元且 $0 \in \rho(A)$，则下列论断是等价的：

(1) $S(t)$ 能够扩张为 $\Delta_\delta = \{z \in D \mid |\arg z| < \delta\}$ 内的解析半群且 $\|S(z)\|$ 在 Δ_δ 内的任一闭子域上是一致有界的.

(2)存在常数 $c > 0$，使得

$$\|R(\sigma + \mathrm{i}\tau; A)\| \leqslant c|\tau|^{-1}, \quad \forall \sigma > 0, \tau \neq 0.$$

(3)存在 $0 < \delta < \pi/2$ 和 $M > 0$，使得

$$\rho(A) \supset \Sigma = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\arg\lambda| < \pi/2 + \delta, \lambda \neq 0\} \cup \{0\},$$

且

$$\|R(\lambda; A)\| \leqslant M|\lambda|^{-1}, \quad \forall \lambda \in \Sigma, \lambda \neq 0.$$

(4) 对 $t > 0$，$S(t)$ 可微，且存在常数 $c > 0$，使

$$\|AS(t)\| \leqslant ct^{-1}, \quad \forall t > 0.$$ □

对于一般的 C^0 类半群 $S(t)$，存在正数 M 和实数 α，使

$$\|S(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

设 $S(t)$ 的无穷小生成元为 A. 置 $T(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}S(t)$，于是

$$\|T(t)\| \leqslant M, \quad \forall t \geqslant 0$$

即 $T(t)$ 是一致有界的 C^0 类半群，其无穷小生成元 $B = A + \alpha I$，并且，当 $\lambda \in \rho(A)$ 时，$\lambda + \alpha \in \rho(B)$.

定理 11.2.1 设 A 是 C^0 类半群 S 的无穷小生成元，则 S 解析的充要条件是存在常数 c 和 $\Lambda > 0$ 使得

$$\| AR(\lambda;A)^{n+1} \| \leqslant c/(n\lambda^n), \quad \forall \lambda > n\Lambda, n \in \mathbf{N}.$$

证明　先证充分性. 由

$$A(\lambda I - A)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}[(\lambda I - A)A(\lambda I - A)^{-1}] = (\lambda I - A)^{-1}A,$$

有

$$AR(\lambda;A)^{n+1} = R(\lambda;A)^{n+1}A.$$

令 $t < \Lambda^{-1}, \lambda = nt^{-1}$, 有 $\lambda > n\Lambda$, 于是由所设条件有

$$\| A[nt^{-1}R(nt^{-1};A)]^{n+1}u \| \leqslant c \| u \| t^{-1}, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

对任一 $u \in D(A)$ 成立. 同时, 由于

$$S(t)v = \lim_{n\to\infty}[nt^{-1}R(nt^{-1};A)]^{n+1}v, \quad \forall v \in X,$$

有

$$A[nt^{-1}R(nt^{-1};A)]^{n+1}u = [nt^{-1}R(nt^{-1};A)]^{n+1}Au$$

收敛, 而 A 是闭算子, 故有

$$\| AS(t)u \| \leqslant c \| u \| t^{-1}, \quad \forall u \in D(A).$$

由于 $D(A)$ 在 X 中稠, 且 $AS(t)$ 是闭算子, 故上式在 X 中成立, 于是

$$\| AS(t) \| \leqslant ct^{-1}.$$

按引理 11.2.1, $S(t)$ 能扩展为 Δ_δ 内的解析半群.

再证必要性. 由(11.1.14)式, 有

$$n!R(\lambda;A)^{n+1}u = \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}S(t)u\,dt,$$

两端以 A 作用, 利用引理 11.2.1 的条件(4)可证

$$\begin{aligned}\| AR(\lambda;A)^{n+1}u \| &\leqslant \frac{c_1}{n!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}dt \| u \| \\ &\leqslant c_2/(n\lambda^n) \| u \|\end{aligned}$$

成立. □

设 $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $a \in \mathbf{R}$, 在复平面 $\mathbf{C}$ 上定义扇形区域

$$S_{a,\varphi} = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \varphi \leqslant |\arg(\lambda - a)| \leqslant \pi, \lambda \neq a\}.$$

定义 11.2.4　称 Banach 空间上的线性算子 A 为扇形算子, 若满足条件

(1) A 是闭算子, 且 $\overline{D(A)} = X$.

(2) 存在 $S_{a,\varphi}$, 使 $S_{a,\varphi} \subset \rho(A)$.

(3) 存在常数 $M \geqslant 1$, 使 $\| (\lambda I - A)^{-1} \| \leqslant \frac{M}{|\lambda - a|}$, $\forall \lambda \in S_{a,\varphi}$.

命题 11.2.2　设 A 是 Banach 空间 X 上的线性闭算子, 并且 $D(A)$ 在 X 中稠, 如果存在常数 $M_1 > 0$, $R_0 > 1$, 当 $|\lambda| > R_0$ 时 $(\lambda I - A)^{-1}$ 存在, 并使 $D((\lambda I - A)^{-1})$ 在 X 中稠, 且

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant M_1/|\lambda|^{-1},$$

则 A 是扇形算子.

证明 作圆

$$O(R)=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid|\lambda|=R>R_0\},$$

则圆外属于 $\rho(A)$,并使

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant\frac{M_1}{|\lambda-a|}\cdot\frac{|\lambda-a|}{|\lambda|},\quad|\lambda|>R.$$

在负实轴上取定点 a 作 $S_{a,\varphi}$,使 $\lambda\in S_{a,\varphi}$时 $|\lambda|>R$,则 A 是扇形算子. □

例 11.2.1 Banach 空间上的线性有界算子是扇形算子.

例 11.2.2 扇形算子的积算子是积空间上的扇形算子.

例 11.2.3 若 A 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子,$\overline{D(A)}=H$,且存在 $\mu>0$ 使得$(Ax,x)\geqslant\mu\|x\|^2$, $\forall x\in H$,则 A 是扇形算子.

命题 11.2.3 设 A 是扇形算子,则对任意的 $\eta\geqslant0$,存在 $\varphi_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$及正常数 R_0,c,M_0,使得

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant\frac{M_0}{|\lambda|+\eta},\quad\|A(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant c,$$

其中 $|\arg\lambda|\geqslant\varphi_0$, $|\lambda|\geqslant R_0$. □

命题 11.2.4 设 A 是扇形算子,若线性算子 B 满足$D(B)\supset D(A)$且

$$\|Bu\|\leqslant\varepsilon\|Au\|+k\|u\|,\quad\forall u\in D(A),$$

其中 $k>0,0<\varepsilon<1/c$, c 如命题 11.2.3 所确定,则 $A+B$ 是扇形算子.

证明 对任意 $u\in X$,有

$$\begin{aligned}\|B(\lambda I-A)^{-1}u\|&\leqslant\varepsilon\|A(\lambda I-A)^{-1}u\|+k\|(\lambda I-A)^{-1}u\|\\&\leqslant(\varepsilon c+kM_0/|\lambda|)\|u\|\end{aligned}$$

或

$$\|B(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant\varepsilon c+kM_0/|\lambda|<1,$$

其中, $|\arg\lambda|\geqslant\varphi_0$, $|\lambda|\geqslant R\geqslant R_0$;此时$[I-B(\lambda I-A)^{-1}]^{-1}$,是 $X\to X$ 的有界线性算子,且

$$\|[I-B(\lambda I-A)^{-1}]^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\|B(\lambda I-A)^{-1}\|}.$$

于是

$$[\lambda I-(A+B)]^{-1}=(\lambda I-A)^{-1}[I-B(\lambda I-A)^{-1}]^{-1}.$$

定义于 X,且存在常数 $M_1>0$,使

$$\begin{aligned}&\|[\lambda I-(A+B)]^{-1}\|\\&\leqslant\|(\lambda I-A)^{-1}\|\cdot\|[I-B(\lambda I-A)^{-1}]^{-1}\|\leqslant\frac{M_1}{|\lambda|}.\end{aligned}$$

易证 $A+B$ 是闭算子且$\overline{D(A+B)}=X$,故由命题 11.2.2 知结论成立. □

推论 11.2.1　如果 A 是扇形算子,则

(1)当 $B\in\mathcal{L}(X)$,且 $D(B)\supset D(A)$时,$A+B$ 是扇形算子.

(2)$\lambda I+A$ 是扇形算子.

证明　由命题 11.2.4 可证. □

下面讨论由扇形算子决定的解析半群.

设 A 是扇形算子,$S_{a,\varphi}$是相应的扇形区域,记函数 $e^{t\xi}$的 Dunford 积分

$$e^{-tA}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma}(\lambda I+A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda, & t>0,\\ I, & t=0,\end{cases}$$

其中 Γ 是$\rho(-A)$中的积分路径,$i=\sqrt{-1}$.不难证明下列定理.

引理 11.2.2　设 $B=A-aI$,则

(1)$\rho(A)\supset S_{a,\varphi}$, $\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant\dfrac{M}{|\lambda-a|}$, $\forall\lambda\in S_{a,\varphi}$等价于

$$\rho(B)\supset S_{0,\varphi},\ \|(\lambda I-B)^{-1}\|\leqslant\frac{M}{|\lambda|},\ \forall\lambda\in S_{0,\varphi}.$$

(2)若 e^{-tA}和 e^{-tB}收敛,则 $e^{-tA}=e^{-tB}e^{-ta}$. □

定理 11.2.2　设 A 是扇形算子,$S_{a,\varphi}$是相应的扇形,Γ 是$\rho(-A)$中的一条围道,对某个 $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,当$|\lambda|\to\infty$时,满足 $\arg\lambda\to\pm\theta$,则

(1)对任意的 $t>0$,e^{-tA}收敛,且是 X 上的有界线性算子族,其 Dunford 积分与 Γ 的选择无关.

(2)存在常数 $c>0$,使

$$\|e^{-tA}\|\leqslant ce^{-at},\quad \|Ae^{-tA}\|\leqslant\frac{c}{t}e^{-at},\quad \forall t>0.$$

(3)对 $t>0$,有

$$\frac{d}{dt}e^{-tA}=-Ae^{-tA},$$

且对任一 $u\in X$ 有

$$\frac{d}{dt}e^{-tA}u=-Ae^{-tA}u.$$

(4)e^{-tA}是以 $-A$ 为无穷小生成元的解析半群,且 e^{-tA}可以解析地延拓到一个包括正实轴在内的扇形$\{t\mid|\arg t|<\varepsilon,t\neq0\}$中去.

证明　由引理 11.2.2,只须对 $a=0$ 的情况加以证明.

证(1)　由 N. Dunford 定理[58],知结论(1)成立.

证(2)　由命题 11.2.3,可以证明,对任意 $\eta\geqslant0$,存在 $\varphi_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$及正常

数 R_0, M_0 使

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leqslant \frac{M_0}{|\lambda| + \eta} \quad (|\pi - \arg\lambda| \geqslant \varphi_0, |\lambda| \geqslant R_0). \tag{11.2.1}$$

在 Dunford 积分中令 $\mu = \lambda t, t > 0$, 积分路径 Γ 相应变为 Γ', 得

$$\|e^{-tA}\| = \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{\Gamma'}\left(\frac{\mu}{t}I + A\right)^{-1} e^{\mu}\frac{d\mu}{t}\right\| \leqslant \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma'}|e^{\mu}|\frac{|d\mu|}{|\mu|} \leqslant c.$$

再由

$$\begin{aligned} Ae^{-tA} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} A(\lambda I + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda(\lambda I + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda, \end{aligned}$$

其中利用 $(\lambda I + A)(\lambda I + A)^{-1} = I$. 同样可得

$$\|Ae^{-tA}\| \leqslant \frac{M_1}{t}\int_{\Gamma'}|e^{\mu}||d\mu| \leqslant \frac{c}{t}.$$

证(3) 对 $t > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{-tA} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda I + A)^{-1}\lambda e^{\lambda t}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} A(\lambda I + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}d\lambda - Ae^{-tA} \\ &= -Ae^{-tA}; \end{aligned}$$

同理可证另一式.

证(4) 先证半群性质. 由

$$(\lambda I + A)^{-1} - (\mu I + A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda I + A)^{-1}(\mu I + A)^{-1}$$

得

$$\begin{aligned} e^{-tA}e^{-sA} &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma}\int_{\Gamma'}(\lambda I + A)^{-1}(\mu I + A)^{-1}e^{\lambda t + \mu s}d\mu d\lambda \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma}\int_{\Gamma'}[(\lambda I + A)^{-1} - (\mu I + A)^{-1}](\mu - \lambda)^{-1}e^{\lambda t + \mu s}d\mu d\lambda \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma}(\lambda I + A)^{-1}e^{\lambda t}\int_{\Gamma'}(\mu - \lambda)^{-1}e^{\mu s}d\mu \cdot d\lambda \\ &\quad - \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma'}(\mu I + A)^{-1}e^{\mu s}\int_{\Gamma}(\mu - \lambda)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda d\mu. \end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(\mu - \lambda)^{-1}e^{\mu s}d\mu = e^{\lambda s},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\mu-\lambda)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda=0,$$

所以

$$e^{-tA}e^{-sA}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda I+A)^{-1}e^{\lambda(t+s)}d\lambda=e^{-(t+s)A},$$

即 e^{-tA} 具半群性质.

下证 e^{-tA} 在零点处的右连续性. 对任一 $u\in D(A)$, $t>0$, 在

$$\begin{aligned}e^{-tA}u-u&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{\lambda t}[(\lambda I+A)^{-1}-\lambda^{-1}]u\,d\lambda\\&=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\lambda^{-1}e^{\lambda t}(\lambda I+A)^{-1}Au\,d\lambda\end{aligned}$$

中令 $\lambda t=\mu$, 积分路径相应地由 Γ 变成 Γ', 于是

$$\begin{aligned}\|e^{-tA}u-u\|&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma'}\frac{|e^{\mu}|}{|\mu|}\left\|\left(\frac{\mu}{t}I+A\right)^{-1}\right\|\|Au\|\cdot|d\mu|\\&\leqslant M'\int_{\Gamma'}\frac{|e^{\mu}|}{|\mu|^2}|d\mu|\cdot\|Au\|t\\&\leqslant M\|Au\|t.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{t\to 0^+}e^{-tA}u=u,\quad\forall u\in D(A).$$

由于 $D(A)$ 在 X 中稠, 故上式在 X 中成立, 即 e^{-tA} 是 C^0 类半群.

其次, 证 $-A$ 是其生成元. 对任一 $u\in D(-A)$ 及 $t>0$, 可证

$$\frac{d}{dt}e^{-tA}u=-e^{tA}Au,$$

于是

$$\frac{1}{t}(e^{-tA}-I)u=-\frac{1}{t}\int_0^t e^{-\tau A}Au\,d\tau,$$

令 $t\to 0^+$, 得

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(e^{-tA}-I)u=-Au.$$

若 G 是 e^{-tA} 的生成元, 则上式说明 $D(G)\supset D(-A)$. 又设 $u\in D(G)$, 有

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(e^{-tA}-I)u=Gu.$$

对任意的 $s>0$, 有 $e^{-sA}u\in D(-A)$, 于是

$$e^{-sA}Gu=Ge^{-sA}u=\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{-tA}e^{-sA}u-e^{-sA}u}{t}=-Ae^{-sA}u.$$

令 $s\to 0^+$, 由 A 的闭性, 有

$$Gu=-Au,$$

即 $D(G)\subset D(-A)$,且 $-A=G$ 是 其生成元.

最后证 e^{-tA}可解析延拓.前面已证 e^{-tA}是可微半群,记

$$T(t)=e^{-tA}.$$

利用$\frac{n^n}{n!}\leqslant e^n$,由命题 11.2.1 和定理 11.2.2(2)得

$$\frac{1}{n!}\|T^{(n)}(t)\|\leqslant\frac{1}{n!}\left\|AT\left(\frac{t}{n}\right)\right\|^n\leqslant\frac{n^n}{n!}\left(\frac{c}{t}\right)^n\leqslant\left(\frac{ce}{t}\right)^n.$$

因此,当$|z-t|\leqslant kt/(ce)$时,级数

$$T(z)=T(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}T^n(t)(z-t)^n$$

按范数收敛,其中 $0<k<1$.取 $t=\mathrm{Re}z$,置

$$\Delta=\left\{z\,\middle|\,|\arg z|<\arctan\frac{1}{ce}\right\}.$$

则 $T(z)$在 Δ 内解析,且 z 是实数时 $T(z)=T(t)$. □

§11.3 分数幂算子与分数幂空间

记 X 为 Banach 空间.设 $\alpha>0$,记 Γ 函数

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}s^{\alpha-1}e^{-s}ds=a^\alpha\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-at}dt,$$

其中,置 $s=at$, $a>0$.设 A 是 Banach 空间 X 上的扇形算子,定义

$$A^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-tA}dt:X\to X;\tag{11.3.1}$$

$$A^0=I.$$

又记算子 A 的谱集为$\sigma(A)$.

命题 11.3.1 设 A 是扇形算子,$\alpha>0$,且 $\mathrm{Re}\sigma(A)>0$,则

(1) $A^{-\alpha}$是 X 上的线性有界算子;

(2) 对任意 $\alpha>0$, $A^{-\alpha}$是可逆的.

证明 证(1) 由 $\mathrm{Re}\sigma(A)>0$ 及定理 11.2.2,存在 $\delta>0$ 及 $c>0$,使

$$\|e^{-tA}\|\leqslant ce^{-\delta t},\tag{11.3.2}$$

于是,定义 $A^{-\alpha}$的积分收敛,并且对任一 $u\in X$,显然 $A^{-\alpha}$是线性的,由

$$\|A^{-\alpha}u\|\leqslant\frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-\delta t}dt\|u\|,$$

知 $A^{-\alpha}$是有界线性算子.

证(2) 由于 A^{-1},即 A 逆,是存在的,故对正整数 n,

$$A^{-n}=(A^{-1})^n$$

是存在的.设 $A^{-\alpha}u=0$,对正整数 $n>\alpha$,由

$$A^{-n}u = A^{-(n-\alpha)}A^{-\alpha}u = 0,$$

有 $u=0$,即 $A^{-\alpha}$是一一映射,故可逆. □

定义 11.3.1　设 A 是扇形算子,$\mathrm{Re}\sigma(A)>0$,对任意 $\alpha>0$,称

$$A^{\alpha} = (A^{-\alpha})^{-1}$$

为 A 的分数幂算子.

分数幂算子 A^{α} 的定义域$D(A^{\alpha})$,当 $\alpha\leqslant 0$ 时,$D(A^{\alpha})=X$;当 $\alpha>0$ 时,$D(A^{\alpha})=R(A^{-\alpha})$.

例 11.3.1　设 B 是线性有界算子,$\|B\|<1$,记 $A=I+B$,则

$$A^{-\alpha} = (I+B)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{n}B^{n},$$

其中

$$\binom{-\alpha}{n} = (-1)^{n}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}.$$

证明　将

$$\mathrm{e}^{-tA} = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-tB} = \mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-tB)^{n}$$

代入

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty}t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-tA}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}B^{n}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty}t^{n+\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}B^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{n}B^{n}.
\end{aligned}$$

□

命题 11.3.2　设 A 是扇形算子,则成立

(1)$A^{-\alpha}A^{-\beta}=A^{-(\alpha+\beta)}$,　$\forall\,\alpha>0,\beta>0$.

(2)$D(A^{\alpha})\subset D(A^{\beta})$,　$\forall\,\alpha\geqslant\beta$.

证明　记,$\Gamma_{\alpha\beta}=(\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta))^{-1}$,有

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha}A^{-\beta} &= \Gamma_{\alpha\beta}\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}t^{\alpha-1}s^{\beta-1}\mathrm{e}^{-(t+s)A}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \Gamma_{\alpha\beta}\int_{0}^{+\infty}\int_{t}^{+\infty}t^{\alpha-1}(r-t)^{\beta-1}\mathrm{e}^{-rA}\mathrm{d}r\mathrm{d}t \\
&= \Gamma_{\alpha\beta}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-rA}\int_{0}^{r}t^{\alpha-1}(r-t)^{\beta-1}\mathrm{d}t\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

$$= \Gamma_{\alpha\beta}\int_0^{+\infty} r^{\alpha+\beta-1}\mathrm{e}^{-rA}\int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{r}\right)^{\beta-1}\mathrm{d}\left(\frac{t}{r}\right)\mathrm{d}r$$
$$= A^{-(\alpha+\beta)},$$

即结论(1)成立;并由此可证结论(2). □

命题 11.3.3 设 A 是扇形算子, $\mathrm{Re}\sigma(A)>0, 0<\alpha<1$ 则

(1) 在 X 中,有 $A^{-\alpha} = \dfrac{\sin\alpha\pi}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} t^{-\alpha}(tI+A)^{-1}\mathrm{d}t$.

(2) 在 $D(A)$ 上,有 $A^{\alpha} = \dfrac{\sin\alpha\pi}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}A(tI+A)^{-1}\mathrm{d}t$.

证明 证(1) 设 A 是扇形算子,则 $\lambda I + A$ 也是扇形算子,且

$$\mathrm{Re}\sigma(\lambda I + A) > \lambda \geqslant 0, \quad \forall \lambda \geqslant 0.$$

由定义(11.3.1),有

$$(\lambda I + A)^{-1} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\tau A}\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau,$$

在下式中置 $t\tau = \zeta$,得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^{-\alpha}(tI+A)^{-1}\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} t^{-\alpha}\left[\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\tau A}\mathrm{e}^{-t\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\tau A}\int_0^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{e}^{-t\tau}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\\ &= \int_0^{+\infty}\tau^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\tau A}\int_0^{+\infty}\zeta^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\zeta}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\tau\\ &= \Gamma(1-\alpha)\int_0^{+\infty}\tau^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\tau A}\mathrm{d}\tau\\ &= \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}A^{-\alpha}.\end{aligned}$$

证(2) 设 $u\in D(A), 0<\alpha<1$,由结论(1),积分

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}(tI+A)^{-1}Au\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}A(tI+A)^{-1}u\,\mathrm{d}t$$

收敛.由命题 11.3.2,有 $A^{\alpha-1}u\in D(A)$,由于 A 的闭线性,有计算

$$A^{\alpha}u = A(A^{\alpha-1}u) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}A(tI+A)^{-1}u\,\mathrm{d}t$$

可行,故结论(2)成立. □

命题 11.3.4 设 A 是扇形算子, $\mathrm{Re}\sigma(A)>0, 0<\alpha<1$,则存在常数 $c>0$,使

(1) $\|A^{-\alpha}\|\leqslant c$,即一致有界.

(2) $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} A^{-\alpha}u = u, \ \forall u\in X$.

证明 证(1) 设 A 是扇形算子,由命题 11.2.3 可以证明存在 $R_0\geqslant 1$,

以及常数 $c_1, c_2>0$，有

$$\|(\lambda I+A)^{-1}\| \leqslant c_1\lambda^{-1}, \quad \forall \lambda \geqslant R_0;$$

$$\|(\lambda I+A)^{-1}\| \leqslant c_2, \quad \forall 0 \leqslant \lambda \leqslant R_0.$$

于是，可以估计

$$\begin{aligned}\|A^{-\alpha}\| &\leqslant \left|\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\right|\left[\int_0^{R_0}\lambda^{-\alpha}\|(\lambda I+A)^{-1}\|\mathrm{d}\lambda\right.\\&\qquad\left.+\int_{R_0}^{+\infty}\lambda^{-1-\alpha}\|\lambda(\lambda I+A)^{-1}\|\mathrm{d}\lambda\right]\\&\leqslant c.\end{aligned}$$

证(2)　任取 $u\in D(A)$，存在 $v\in X$ 使 $u=A^{-1}v$. 利用(11.3.2)，对任意给定的 $T_0\geqslant 1$，有

$$\begin{aligned}\|A^{-\alpha}u-u\| &= \|A^{-(1+\alpha)}v-A^{-1}v\|\\&=\left\|\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}-1\right)\mathrm{e}^{-tA}v\mathrm{d}t\right\|\\&\leqslant\left(c\int_0^{T_0}\left|\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}-1\right|\mathrm{d}t+c_1\int_{T_0}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{d}t\right)\|v\|\end{aligned}$$

其中常数 $c, c_1>0$. 令 $\alpha\to 0^+$，再令 $T_0\to+\infty$，有

$$\lim_{\alpha\to 0^+}A^{-\alpha}u=u, \quad \forall u\in D(A).$$

由结论(1)，$A^{-\alpha}$ 在(0,1)内一致有界，及 $\overline{D(A)}=X$，知结论(2)成立.　□

命题 11.3.5　设 A 是扇形算子，$\mathrm{Re}\sigma(A)>0$，则对任意 α，A^α 是闭算子，且 $\overline{D(A^\alpha)}=X$.

证明　当 $\alpha\leqslant 0$ 时，A^α 是 X 上的线性有界算子，故结论成立.

当 $\alpha>0$ 时，由于闭算子的逆是闭算子，故 $A^\alpha=(A^{-\alpha})^{-1}$ 是闭算子. 下证 $D(A^\alpha)$ 在 X 中稠. 首先，对任意的 $x\in D(A)$，存在 $y\in X$，使 $x=A^{-1}y$. 由于 $D(A)$ 在 X 中稠，故存在 $\{y_m\}_{m\in\mathbf{N}}\subset D(A)$，使

$$y_m\to y, \quad 当\ m\to+\infty.$$

记 $x_m=A^{-1}y_m$，则 $x_m\in D(A)$，$Ax_m=y_m\in D(A)$ 即 $x_m\in D(A^2)$ 且

$$x_m=A^{-1}y_m\to A^{-1}y=x, \quad 当\ m\to+\infty.$$

于是，$D(A^2)$ 在 $D(A)$ 进而在 X 中稠. 类似地，归纳可证，对一切自然数 n，$D(A^n)$ 在 X 中稠.

对任一 $\alpha>0$，存在 $n\in\mathbf{N}$ 使 $n>\alpha$，由命题 11.3.2，有

$$D(A^n)\subset D(A^\alpha),$$

故 $D(A^\alpha)$ 在 X 中稠.　□

定理11.3.1　设 A 是扇形算子，$\mathrm{Re}\sigma(A)>0$，则对任意的 $t>0$，由 $-A$

生成的解析半群 e^{-tA} 满足

(1) $e^{-tA}:X\to D(A^\alpha),\quad \forall\alpha\in\mathbf{R}$.

(2) $A^\alpha e^{-tA}\in\mathscr{L}(X)$.

(3) $A^\alpha e^{-tA}u=e^{-tA}A^\alpha u,\quad \forall u\in D(A^\alpha)$.

证明 证(1) 由命题 11.2.1,有

$$e^{-tA}:X\to D(A^n),\quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

取 $n>\alpha$ 即有结论(1)成立.

证(2) 显然,$A^\alpha e^{-tA}$ 是 X 上的闭线性算子,由闭图像定理可证结论(2).

证(3) 设 $\beta>0$,利用(11.3.1)式及

$$e^{-tA}e^{-sA}=e^{-sA}e^{-tA},$$

可证

$$A^{-\beta}e^{-tA}=e^{-tA}A^{-\beta},$$

即结论(3)成立. □

若 A 是扇形算子,当 $\mathrm{Re}\sigma(A)>0$ 时,可以定义分数幂算子 A^α;当 $\mathrm{Re}\sigma(A)\leqslant 0$ 时,可选取 a,令 $A_1=A+aI$,使 $\mathrm{Re}\sigma(A_1)>0$,由推论 11.2.1 知 A_1 也是扇形算子,从而可以定义分数幂算子 A_1^α. 置

$$X^\alpha=D(A_1^\alpha).$$

并赋以图范数

$$\|x\|_\alpha=\|A_1^\alpha x\|,\quad \forall x\in X^\alpha$$

对不同的 a,只要 $\mathrm{Re}\sigma(A)>0$,就使 A_1^α 有相同的定义域. 可以证明图范数不依赖于 a 的选择.

定理 11.3.2 设 A 是扇形算子,对不同的 a,只要 $\mathrm{Re}\sigma(A_1)=\mathrm{Re}\sigma(A+aI)>0$,则图范数是等价的.

推论 11.3.1 若 B_1,B_2 是扇形算子,$D(B_1)=D(B_2)$,$\mathrm{Re}\sigma(B_j)>0$,对任意的 $\beta\in[0,1]$,$X_j^\beta=D(B_j^\beta)$,$j=1,2$,且存在 $\alpha\in(0,1)$ 使 $(B_1-B_2)B_1^\alpha$ 是有界线性算子,则 $X_1^\beta=X_2^\beta$ 且有等价的图范数.

定义 11.3.2 设 A 是 Banach 空间 X 上的扇形算子,对 $a\in\mathbf{R}$,有 $\mathrm{Re}\sigma(A_1)=\mathrm{Re}\sigma(A+aI)>0$,则称 $(X^\alpha,\|\cdot\|_\alpha)$ 为分数幂空间.

称空间 X^α 连续嵌入 X^β,若 $X^\alpha\subset X^\beta$ 且 $n\to+\infty$ 时,有

$$\text{在 } X^\alpha \text{ 中},x_n\to x,\Rightarrow \text{在 } X^\beta \text{ 中},x_n\to x.$$

如果嵌入映射映 X^α 中有界集为 X^β 中的紧集,则称嵌入为紧嵌入.

定理 11.3.3 设 A 是扇形算子,则

(1) $(X^\alpha,\|\cdot\|_\alpha)$ 是一族 Banach 空间,$X^0=X$,且当 $\alpha\geqslant\beta\geqslant 0$ 时,有 X^α 连续嵌入 X^β,并在 X^β 中稠.

(2)若 A 有紧预解式,当 $\alpha>\beta\geqslant 0$ 时,嵌入是紧嵌入.

证明 证(1) 显然 $X^0=X$ 且 X^α 是 Banach 空间.设 $\alpha\geqslant\beta\geqslant 0$,由命题 11.3.2,有

$$X^\alpha = D(A^\alpha) \subset D(A^\beta) = X^\beta.$$

又设对一切 $n\in\mathbf{N}$, $x_n, x\in X^\alpha$ 且在 X^α 中 $x_n\to x$, $n\to+\infty$,则 $x_n, x\in X^\beta$,且由命题 11.3.1 有

$$\begin{aligned}\| x_n - x \|_\beta &= \| A_1^\beta(x_n - x_1) \| = \| A_1^{\beta-\alpha}(A_1^\alpha(x_n - x_1)) \| \\ &\leqslant M \| A_1^\alpha(x_n - x_1) \| = M \| x_n - x \|_\alpha \to 0, \quad n\to+\infty.\end{aligned}$$

由于 X^α 在 X 中稠,故在 X^β 中稠.

证(2) 由于 $A_1^{-1}=(A+aI)^{-1}$是紧算子,故 $A_1^{\beta-\alpha}=A_1^{-(\alpha-\beta)}$ 也是紧算子;同时, A_1^α 是闭算子,故

$$A_1^\beta = A_1^{\beta-\alpha}\circ A_1^\alpha$$

是紧算子,从而 $X^\beta\supset X^\alpha$ 是紧包含. □

§11.4 Banach 空间上的动力系统

设 X 是 Banach 空间.假设

H 1° A 是 X 上的扇形算子, $A_1=A+aI$, $\mathrm{Re}\sigma(A_1)>0$,对于 $\alpha\geqslant 0$,空间 $X^\alpha=D(A_1^\alpha)$赋以图范数

$$\| x \|_\alpha = \| x \| + \| A_1 x \|, \forall x \in X^\alpha.$$

H 2° 设$0\leqslant\alpha<1$, U是$\mathbf{R}\times X^\alpha$中的开集,映射$f: U\to X$在$U$上关于$t\in\mathbf{R}$局部Hölder连续,关于$u\in X^\alpha$局部Lipschitz连续,即对$(t^*, u^*)\in U$,存在$(t^*, u^*)$的开邻域$V\subset U$,及正常数$L$, μ,其中$0<\mu<1$,使得对于(t_1, u_1), $(t_2, u_2)\in V$,有

$$\| f(t_1, u_1) - f(t_2, u_2) \| \leqslant L(|t_1 - t_2|^\mu + \| u_1 - u_2 \|_\alpha).$$

考虑抽象微分方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = f(t, u), \quad t > t_0, \tag{11.4.1}$$

及相应的初值问题

$$u(t_0) = u_0, \tag{11.4.2}$$

以及由值问题(11.4.1)和(11.4.2)诱导出的积分方程

$$u(t) = \mathrm{e}^{-(t-t_0)A}u_0 + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)A}f(\tau, u(\tau))\mathrm{d}s. \tag{11.4.3}$$

定理 11.4.1 设条件 H1°, H2°成立,则

(1)若 u 是$[t_0,t_1)$上初值问题(11.4.1)和(11.4.2)的解,那末也是积分方程(11.4.3)的解.

(2)若 $u\in C([t_0,t_1);X^\alpha)$是(11.4.3)的解,且对某个 $\rho>0$,有

$$\int_{t_0}^{t_0+\rho}\|f(\tau,u(\tau))\|\mathrm{d}\tau<+\infty,$$

则 u 是$[t_0,t_1)$上该初值问题的解.

证明 可参考相关文献. □

以下简称初值问题(11.4.1)和(11.4.2)为初值问题.

可以把常微分方程的主要结论,例如解的唯一存在性、延拓性等,推广到 Banach 空间上抽象的初值问题(11.4.1)和(11.4.2),还可以就初值、参数、右端函数讨论解的连续性和可微性,见文献[130].

在问题(11.4.1)中,如果 $f(t,u)$不显含 t,即 $f(t,u)\equiv f(u)$,这时,称

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au=f(u) \tag{11.4.4}$$

为自治方程.下面讨论自治方程,初值问题

$$u(0)=u_0 \tag{11.4.5}$$

的解所确定的动力系统.

设条件 H1°和 H2°成立,又设 E 是 U 的闭子集,则对初值 $u(0)=x\in E$,(11.4.5)对一切 $t\geqslant 0$ 存在唯一的解

$$u(t;x)=u(t;0,x)\in E,\quad t\in\mathbf{R}_+,$$

满足初值条件

$$u(0;x)=x\in E. \tag{11.4.6}$$

定义映射 $S(t):E\to E$ 为

$$S(t)x=u(t;x), \tag{11.4.7}$$

由此确定度量空间 E 上的映射族

$$\{S(t):E\to E\mid t\geqslant 0\}.$$

使之构成一个半群.

由解的唯一性和对初值 $u(0)=x$ 的连续性,立即可得如下命题.

命题 11.4.1 设 A 是 Banach 空间上的扇性算子,存在 $0\leqslant\alpha<1$,U 是 X^α 中的开集,使 $f:U\to X$ 是局部 Lipschitz 的,若 E 是 U 中的闭子集,且对一切 $t\geqslant 0$,(11.4.4)和(11.4.6)的解 $u(t;x)\in E$,则存在 E 上按(11.4.6)和(11.4.7)确定的动力系统$\{S(t):E\to E\mid t\geqslant 0\}$满足

(1)对每一个 $t\geqslant 0$,映射 $S(t):E\to E$ 连续.

(2)对每一个 $x\in E$,映射 $t\mapsto S(t)x$ 连续. □

命题 11.4.2 度量空间 E 上的动力系统$\{S(t):E\to E\mid t\geqslant 0\}$一致关于

有限时间 t 在空间 E 上是连续的，即对任意的 $T>0$ 和 $x\in E$，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $y\in E$ 且 $\rho(y,x)<\delta$ 时，有

$$\rho(S(t)y, S(t)x) < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T]$$

成立；其中 $\rho(\cdot,\cdot)$ 是 E 上的度量. □

下面引进 Lyapunov 函数的概念.

定义 11.4.1　设 $\{S(t)\mid t\geqslant 0\}$ 是度量空间 E 上的动力系统，E 上的一个实值连续函数 V 称之为 Lyapunov 函数，若对一切 $x\in E$，有

$$\dot{V}(x) = \limsup_{t\to 0^+} \frac{1}{t}[V(S(t)x) - V(x)] \leqslant 0,$$

$\dot{V}(x)$ 称为 $V(S(t)x)$ 在 $t=0$ 处的右上导数.

命题 11.4.3　成立

(1)对任意的 $x\in E$ 及 $t\geqslant 0$，有

$$\dot{V}(S(t)x) = \limsup_{\Delta t\to 0^+} \frac{1}{\Delta t}[V(S(t+\Delta t)x) - V(S(t)x)] \leqslant 0.$$

(2)当 $x\in E$ 且对一切 $t\geqslant 0$，有 $V(S(t)x)$ 是非增的.

(3)若 $V(0)=0$，则存在 $r>0$，当 $\|x\|<r$ 时

$$V(x) \leqslant b(\|x\|),$$

其中 $b(\cdot)$ 是 $[0,r]$ 上连续的严格增函数，且 $b(0)=0$.

证明　证(1)　由

$$V(S(t+\Delta t)x) - V(S(t)x) = V(S(\Delta t)S(t)x) - V(S(t)x),$$

令 $y=S(t)x$，则 $\dot{V}(S(t)x)=\dot{V}(y)\leqslant 0$.

证(2)　由结论(1) $\dot{V}(S(t)x)\leqslant 0$ 可知.

证(3)　由于 $V(x)$ 连续且 $V(0)=0$，故存在正数 r 和 k，当 $\|x\|\leqslant r$ 时，$|V(x)|\leqslant k$，于是，令

$$b(\|x\|) = \sup_{\|y\|\leqslant r} |V(y)| + \|x\|$$

即可，其中当 $\|x\|=0$ 时，取 $r=0$. □

§11.5　极　限　集

设 $\{S(t):E\to E\mid t\geqslant 0\}$ 是 Banach 空间 E 上的动力系统. 记 $x_0\in E$ 的 ω 极限集为 $L_\omega(x_0)$，

$$L_\omega(x_0) = \bigcap_{\tau\geqslant 0} \overline{\{S(t)x_0 \mid t \geqslant \tau\}}.$$

$L_\omega(x_0)$ 是正不变集，即对 $y\in L_\omega(x_0)$ 有 $S(t)y\in L_\omega(x_0)$，对一切 $t\geqslant 0$ 成立. 特别当 E 是紧空间时，有如下命题.

命题 11.5.1 设 E 是紧致的 Banach 空间, $x_0\in E$, 则

(1) $L_\omega(x_0)$ 是非空紧连通的不变集.

(2) $\rho(S(t)x_0, L_\omega(x_0))\to 0,\ t\to+\infty$.

证明 结论(2)显然, 下证(1) 由命题 2.2.3 知 $L_\omega(x_0)$ 是非空紧不变集, 只需证 $L_\omega(x_0)$ 是连通的. 若其不然, 则存在闭集 Ω_1 和 Ω_2 使

$$L_\omega(x_0)=\Omega_1\cup\Omega_2,\quad \rho(\Omega_1,\Omega_2)\geqslant\rho_0>0.$$

于是, 存在单调上升趋于无穷的序列 $\{t'_n\}$ 和 $\{t''_n\}$, $t'_n<t''_n<t'_{n+1}$ 及 $N\in\mathbf{N}$, 当 $n\geqslant N$ 时, 有

$$\rho(S(t'_n)x_0,\Omega_1)<\frac{\rho_0}{3},\quad \rho(S(t''_n)x_0,\Omega_1)>\frac{2\rho_0}{3}.$$

由于, $\rho(S(t)x_0,\Omega_1)$ 是 t 的连续函数, 故存在 $t'_n<t_n<t''_n$, 使

$$\rho(S(t_n)x_0,\Omega_1)=\frac{\rho_0}{2}.$$

由 E 的紧性, $\{S(t_n)x_0\mid n\in\mathbf{N}\}$ 存在收敛子列, 故设

$$y=\lim_{n\to+\infty}S(t_n)x_0\in L_\omega(x_0),$$

这与

$$\rho(y,\Omega_1)=\lim_{n\to+\infty}\rho(S(t_n)x_0,\Omega_1)=\frac{\rho_0}{2},$$

矛盾, 故 $L_\omega(x_0)$ 是连通的. □

设 V 是 E 上的 Lyapunov 函数, 记

$$E_V=\{x\in E\mid \dot V(x)=0\}.$$

命题 11.5.2 设 M 是 E_V 中的最大不变子集, 若 $\mathrm{Orb}(x_0)$ 包含在 E 中的一个紧集内, 则 $L_\omega(x_0)\subset M$ 且 $S(t)x_0\to M(t\to+\infty)$.

证明 由于 $\mathrm{Orb}(x_0)=\{S(t)x_0\mid t\geqslant 0\}$ 含于某紧集内, $V(S(t)x_0)$ 则是紧集上的连续函数且关于 t 非增(命题 11.4.3), 故存在 $l\in\mathbf{R}$ 使

$$V(S(t)x_0)\to l,\quad t\to+\infty.$$

对任一 $y\in L_\omega(x_0)$, 存在 $\{t_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, 使 $S(t_n)x_0\to y$, $n\to+\infty$, 故

$$V(y)=l,\quad \forall\, y\in L_\omega(x_0).$$

注意到 $L_\omega(x_0)$ 的正不变性, 有 $S(t)y\in L_\omega(x_0)$, 于是

$$\dot V(y)=0,\quad \forall\, y\in L_\omega(x_0),$$

即 $L_\omega(x_0)\subset E_V$. 由 M 的最大性, 及 $L_\omega(x_0)$ 的不变性, 有

$$L_\omega(x_0)\subset M.$$

再由

$$\rho(S(t)x_0,M)\leqslant\rho(S(t)x_0,L_\omega(x_0)),$$

令 $t \to +\infty$,有

$$S(t)x_0 \to M,$$

故结论成立. □

称 $x \in E$ 是动力系统的平衡点,若

$$S(t)x = x, \quad \forall t \geqslant 0,$$

所有平衡点构成的集合也称为平衡点集.

命题 11.5.3　设 V 是 E 上的一个 Lyapunov 函数,$\mathrm{Orb}(x_0)$含于某紧集内,若对任意的 $x \in E$,当 x 不是平衡点时,$V(S(t)x)$是严格下降的,则 $L_\omega(x_0)$含于平衡点集内.

证明　对任一 $y \in L_\omega(x_0)$,在命题 11.5.2 的证明中,存在常数 l,使

$$V(S(t)y) = l, \quad \forall t \geqslant 0,$$

再由 V 的单调性,有

$$S(t)y = y, \quad \forall t \geqslant 0,$$

即 y 是平衡点. □

命题 11.5.4　设 $\mathrm{Orb}(x_0)$含于 E 的某一紧集内,E_V 含于平衡点集内,则 $L_\omega(x_0)$含于平衡点集;当平衡点是孤立点时,$L_\omega(x_0)$由一个平衡点组成.

证明　在命题 11.5.2 的证明中,由

$$L_\omega(x_0) \subset E_V$$

可知结论成立;后一结论由 $L_\omega(x_0)$的连通性,可证. □

例 11.5.1　考虑

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = f(u), \tag{11.5.1}$$

的定解问题

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{11.5.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{11.5.3}$$

其中,$A = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$,$f(u) \in C^1(\mathbf{R})$.其解记为 $u(x,t;\varphi)$.

取 $X = L^2(0,\pi)$,则$D(A) = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)$,$X^{1/2} = D(A^{1/2}) = H_0^1(0,\pi)$,并且 $f: X^{1/2} \to X$ 是局部 Lipschitz 的.

对任意给定的 $\varphi \in H_0^1(0,\pi)$,方程(11.5.1)的定解问题存在唯一古典解

$$u(x,t;\varphi) \in H_0^1(0,\pi), \quad t \in [0,s), \quad 0 < s \leqslant +\infty.$$

令

$$F(u) = \int_0^u f(\zeta)\mathrm{d}\zeta,$$

对任一 $\varphi \in H_0^1(0,\pi) = X^{1/2}$,置

$$V(\varphi)=\int_0^{\pi}\Big[\frac{1}{2}(\varphi'(x))^2-F(\varphi(x))\Big]\mathrm{d}x.$$

显然 V 在 $H_0^1(0,\pi)$ 上连续，易证 $V(\varphi)$ 是(11.5.1)在 $H_0^1(0,\pi)$ 上的 Lyapunov 函数.

设解 $u(x,t)$ 在 $H_0^1(0,\pi)$ 中有界.因为 A 有紧预解式，所以 $\{u(x,t)\}_{t\geqslant 0}$ 是紧的.若 $\varphi\in L_\omega(u(x,0))$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(u(x,t;\varphi))=0,$$

计算上式，得

$$\int_0^{\pi}u_t^2\mathrm{d}x=0.$$

于是 $u(x,t;\varphi)$ 与 t 无关，因此 $u(x,t;\varphi)=\varphi(x)$ 满足

$$\begin{cases}\varphi''(x)+f(\varphi)=0,\\ \varphi(0)=\varphi(\pi)=0.\end{cases}\tag{11.5.4}$$

故 $L_\omega(u(x,0))$ 含于(11.5.4)的解集合. □

对于(11.5.1)导出的反应扩散差分动力系统的研究，可进一步参看与作者相关的基于比较原理的工作[134~140].

§11.6 稳定性

首先讨论 Banach 空间 E 上动力系统 $\{S(t)\mid t\geqslant 0\}$ 在平衡点 $x_0\in E$ 处的稳定性.

定义 11.6.1 称平衡点 x_0 是动力系统的吸引点，若存在 $\delta>0$，当 $x\in\{x\in E\mid\rho(x,x_0)<\delta\}$ 时，有

$$\lim_{t\to+\infty}S(t)x=x_0;$$

集合 $\{x\in E\mid\lim\limits_{t\to+\infty}S(t)x=x_0\}$ 称为 x_0 的吸引集.

定义 11.6.2 称平衡点 x_0 是稳定的，若任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $x\in\{x\in E\mid\rho(x,x_0)<\delta)\}$ 时，有

$$\rho(S(t)x,x_0)<\varepsilon,\quad\forall t\geqslant 0,$$

称集 $\{x\in E\mid\rho(x,x_0)<\delta\}$ 为 x_0 点的稳定域；若 x_0 既是稳定的又是吸引的，则称 x_0 是渐近稳定的，而当 E 是吸引集时，则称 x_0 是全局渐近稳定的.

设 $h>0$(或 $h=+\infty$)，记 $K[0,h]$(或 $K[0,+\infty)$)为区间 $[0,h]$(或 $[0,+\infty)$)上全体实值连续严格递增且过零点的函数构成的集合；特别，记 KR 为 $K[0,h]$(或 $K[0,+\infty)$)中满足条件

$$\lim_{r\to+\infty}a(r)=+\infty,\quad a(r)\in K[0,h](\text{或 }K[0,+\infty)),$$

的全体函数.

考虑常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x),\\ x(t_0)=x_0,\end{cases}\tag{11.6.1}$$

其中 $f\in C(G)$，$(t_0,x_0)\in G$，G 是 (t,x) 平面中的开区域. 称(11.6.1)的一个解 $\varphi_M(t)$ 是该问题的最大解，如果(11.6.1)的任一解 $x=x(t)$，均满足

$$x(t)\leqslant\varphi_M(t),\quad\forall\,t\in(a,b),$$

其中 (a,b) 是解的存在区间.

又考虑微分不等式

$$\overline{D}_+\,x(t)\leqslant f(t,x(t)),\tag{11.6.2}$$

其中 x 在点 t 处的右上导数

$$\overline{D}_+\,x(t)=\lim_{h\to0^+}\sup\frac{x(t+h)-x(t)}{h},$$

若 $x(t)$ 连续且满足(11.6.2)，则称 $x(t)$ 是(11.6.2)的解.

引理 11.6.1 (比较定理) 设 $(t_0,x_0)\in G$，$f\in C(G)$，$x(t)$ 是(11.6.2)的解，$x(t_0)\leqslant x_0=\varphi_M(t_0)$，$\varphi_M(t)$ 是方程(11.6.1)的最大解，记

$$\Delta=\{t\in\mathbf{R}\mid t\geqslant t_0\text{ 使 }x(t)\text{ 与 }\varphi_M(t)\text{ 同时存在}\},$$

则

$$x(t)\leqslant\varphi_M(t),\quad\forall\,t\in\Delta.$$

证明 任给 $\varepsilon>0$，考虑辅助方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x)+\varepsilon,\quad x(t_0)=x_0+\varepsilon,$$

记其解为 $x(t;\varepsilon)$. 于是，存在 $\delta>0$，当 $t_0\leqslant t<t_0+\delta$ 时，有

$$x(t)<x(t;\varepsilon).$$

进而，可断言

$$x(t)<x(t;\varepsilon),\quad\forall\,t\in\Delta_\varepsilon,\tag{11.6.3}$$

其中 Δ_ε 是 $x(t)$ 和 $x(t;\varepsilon)$ 共同存在的区间.

若其不然，存在 t' 和递减而趋于零的序列 $\{h_n\}_{n\in\mathbf{N}}$，使

$$x(t')=x(t';\varepsilon),\quad x(t'+h_n)>x(t'+h_n;\varepsilon),$$

从而

$$\begin{aligned}\overline{D}_+\,x(t')&\geqslant\lim_{n\to+\infty}\sup\frac{x(t'+h_n)-x(t')}{h_n}\\&\geqslant\lim_{n\to+\infty}\frac{x(t'+h_m;\varepsilon)-x(t';\varepsilon)}{h_n}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(t', x(t';\varepsilon)) + \varepsilon \\
&= f(t', x(t')) + \varepsilon \\
&> f(t', x(t')) \\
&\geqslant \overline{D}_+ x(t')
\end{aligned}
$$

是矛盾式，故(11.6.3)成立. 在该式中令 $\varepsilon \to 0$，下面只需证

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t;\varepsilon) = \varphi_M(t),$$

即有结论成立. 事实上，对(11.6.1)的任意一解 $\tilde{x}(t)$，类似可证

$$\tilde{x}(t) < x(t;\varepsilon).$$

而 $f(t,x)+\varepsilon \in C(G)$. 由常微分方程中解对右端项的连续依赖性，在上式中令 $\varepsilon \to 0$ 时，$x(t;\varepsilon)$ 趋于(11.6.1)的解，即为 $\varphi_M(t)$. □

定理 11.6.1 设 E 是 Banach 空间，$0 \in E$ 是 E 上动力系统 $\{S(t) \mid t \geqslant 0\}$ 的平衡点，V 是 E 上的 Lyapunov 函数，满足 $V(0)=0$，则

(1)如果存在 $a \in K[0,h]$ 使 $a(\|x\|) \leqslant V(x)$，则平衡点 $x=0$ 是稳定点.

(2)特别，如果更有 $c \in K[0,h]$ 使 $\dot{V} \leqslant -c(\|x\|)$，则平衡点 $x=0$ 是渐近稳定的，且在 $\{x \in E \mid \|x\| < h_0 \leqslant h\}$ 上是一致的，即任给 $\varepsilon > 0$，存在 $T > 0$，当 $t > T$ 时，对一切 $x \in \{x \in E \mid \|x\| < h_0 \leqslant h\}$ 有

$$\|S(t)x\| < \varepsilon.$$

证明 证结论(1) 设 E 上的范数 $\|\cdot\|$ 与度量是一致的，即 $\|x\| = \rho(x,0)$. 由假设，任给 $0 < \varepsilon < h$，存在 $0 < \delta < h$，当 $\|x\| < \delta$ 时

$$V(x) < a(\varepsilon);$$

又存在 $T > 0$，当 $0 \leqslant t < T$ 时，$\|S(t)x\| < h$，于是，由命题 11.4.3，有

$$a(\|S(t)x\|) \leqslant V(S(t)x) \leqslant V(x) < a(\varepsilon)$$

或

$$\rho(S(t)x,0) = \|S(t)x\| < a^{-1}(a(\varepsilon)) = \varepsilon, \quad 0 \leqslant t < T,$$

由连续函数的性质，不难将上式延拓到 $\mathbf{R}_+$ 上，即平衡点 $x=0$ 是稳定的.

证结论(2) 由命题 11.4.3 存在 $h > 0$ 和 $b \in K[0,h]$ 满足

$$V(x) \leqslant b(\|x\|), \quad \forall \|x\| \leqslant h,$$

b^{-1} 存在且 $b^{-1} \in K[0, b(h)]$. 又取 $0 < \varepsilon_0 < h$ 充分小，置

$$\omega_0 = \sup\{V(x) \mid \|x\| \leqslant \varepsilon_0\},$$

使得

$$b^{-1}(\tau) \in [0,h], \quad \forall 0 \leqslant \tau \leqslant \omega_0.$$

step1 考虑辅助问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+c(b^{-1}(\omega))=0,\\ \omega(0)=\omega_0,\end{cases}\tag{11.6.4}$$

记其最大解为 $\omega_M(t)$. 由于

$$\frac{\mathrm{d}\omega_M(t)}{\mathrm{d}t}=-c(b^{-1}(\omega_M(t)))<0,$$

故 $\omega_M(t)$ 单调下降. 并且, 在解的存在区间上有

$$\omega_M(t)\geqslant 0,$$

事实上, 若存在第一个使 $\omega_M(t)$ 为零的 $t=t^*$, 则令

$$\omega^*(t)=\begin{cases}\omega_M(t), & t\in[0,t^*],\\ 0, & t>t^*.\end{cases}$$

则 $\omega^*(t)$ 也是辅助问题(11.6.4)的解, 从而 $\omega_M(t)\geqslant\omega^*(t)\geqslant 0$. 显见, $\omega_M(t)$ 的存在区间为 $[0,+\infty)$, 于是, 有

$$\lim_{t\to+\infty}\omega_M(t)=0,\tag{11.6.5}$$

事实上, 由 $\omega_M(t)$ 单调下降且非负, 知 $\omega'_M(t)\to 0(t\to+\infty)$, 再由(11.6.4)知上式成立.

step2　由结论(1), 存在 $0<h_0\leqslant h$ 使得

$$\|S(t)x\|\leqslant\min(h,\omega_0),\quad\forall\|x\|<h_0\leqslant h,$$

于是, 由条件所设有

$$\dot{V}(S(t)x)\leqslant -c(\|S(t)x\|),\tag{11.6.6}$$

$$V(S(t)x)\leqslant b(\|S(t)x\|).\tag{11.6.7}$$

由 K 类函数的单调性, 从(11.6.7)得

$$-c(\|S(t)x\|)\leqslant -c(b^{-1}(V(S(t)x)),$$

代入(11.6.6)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(S(t)x)+c(b^{-1}(V(S(t)x))\leqslant 0,$$

$$V(S(0)x)=V(x)\leqslant\omega_0,$$

与辅助问题(11.6.4)比较, 并援用引理 11.6.1, 得

$$V(S(t)x)\leqslant\omega_M(t),\quad\forall t\geqslant 0,$$

由结论(1)中条件所设, 有

$$\|S(t)x\|\leqslant a^{-1}(\omega_M(t)),\quad\forall t\geqslant 0,\|x\|<h_0,$$

由(11.6.5)显见结论(2)成立. □

该定理就 Banach 空间 E 上一般的动力系统 $\{S(t):E\to E\,|\,t\geqslant 0\}$ 讨论了零平衡点稳定性的充分条件. 下面讨论一种最基本的情况, 即考虑 Banach 空

间 X 上的线性齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = 0, \tag{11.6.8}$$

的零平衡点的稳定性，其中 A 是 Banach 空间 X 上的扇形算子.

由定理 11.1.4，方程(11.6.8)满足初值条件 $u(t_0)=u_0$ 的解是

$$S(t)u_0 = \mathrm{e}^{-A(t-t_0)}u_0,$$

其零平衡点就是(11.6.8)的零解，其中 $S(t)=\mathrm{e}^{-A(t-t_0)}$是 A 确定的半群.

定理 11.6.2 设 A 是 Banach 空间 X 上的扇形算子，$t_0 \geqslant 0$，则

(1)平衡点 $u=0$ 稳定(一致稳定)的充要条件是：存在常数 $c>0$，使得 $S(t)$是一致有界半群，即

$$\| S(t) \| = \| \mathrm{e}^{-A(t-t_0)} \| \leqslant c, \quad \forall t \geqslant t_0.$$

(2)下列条件等价

1° 平衡点 $u=0$ 是一致渐近稳定的；

2° 存在常数 $\beta, c>0$，使

$$\| S(t) \| = \| \mathrm{e}^{-A(t-t_0)} \| \leqslant c\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)}, \quad \forall t \geqslant t_0;$$

3° $u=0$ 是指数稳定的，即存在 $\beta>0$，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $\| u_0 \| < \delta$ 时，

$$\| S(t)u_0 \| = \| u(t;t_0,u_0) \| \leqslant \varepsilon \mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)}, \quad \forall t \geqslant t_0;$$

4° $\mathrm{Re}\sigma(A)>0$.

证明 证结论(1) 当 $S(t)$是一致有界半群时，其稳定性(也是一致稳定性)是显见的. 反之，当 $u=0$ 稳定时，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\| x \| \leqslant \delta$ 时，$\| S(t)x \| < \varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned} \| S(t) \| &= \sup_{\| y \| = 1} \| S(t)y \| = \delta^{-1} \sup_{\| y \| = 1} \| S(t)\delta y \| \\ &\leqslant \delta^{-1} \sup_{\| \zeta \| \leqslant \delta} \| S(t)\zeta \| \leqslant \delta^{-1}\varepsilon, \end{aligned}$$

取 $c=\delta^{-1}\varepsilon$ 即可.

证结论(2) 证 1°⇒2° 设 $u=0$ 一致渐近稳定，即存在 $b>0$，对任给的 $0<\varepsilon<b$，存在仅与 ε 有关的 $T>0$，当 $\| x \| \leqslant b$ 时

$$\| S(t)x \| = \| \mathrm{e}^{-(t-t_0)A}x \| < \varepsilon, \quad \forall t > t_0 + T,$$

于是

$$\| \mathrm{e}^{-(t-t_0)A} \| < b^{-1}\varepsilon, \quad \forall t > t_0 + T,$$

特别，$\| \mathrm{e}^{-TA} \| < b^{-1}\varepsilon < 1$.

对任意 $t \geqslant t_0$，存在 $n \in \mathbf{Z}$，使 $nT \leqslant t - t_0 \leqslant (n+1)T$，于是，取

$$\beta = -T^{-1}\ln(b^{-1}\varepsilon),$$

得

$$\| S(t) \| = \| e^{-(t-t_0)A} \| = \| e^{-(t-t_0-nT)A} e^{-nTA} \| \leqslant M(b^{-1}\varepsilon)^n$$
$$\leqslant M e^{-\beta nT} = M e^{\beta T} e^{-\beta(n+1)T} \leqslant c e^{-\beta(t-t_0)}, \quad \forall t \geqslant t_0,$$

其中,取 $c = Me^{\beta T}$,即 1°⇒2°成立.

证 2°⇒1° 这是显然的.下面只需证 2°⇒3°⇒4°⇒2°,则结论(2)成立.

证 2°⇒3° 取 $\delta = c^{-1}\varepsilon$ 即可.

证 3°⇒4° 设 $u=0$ 是指数稳定的,则有 3°中的估计式成立.常数 $\beta>0$ 如该估计式所确定.对任一 $\lambda \in \sigma(A)$,则

$$\mathrm{Re}\lambda \geqslant \beta > 0.$$

若其不然,由 $\mathrm{Re}\lambda < \beta$,存在 $T_0, c_0 > 0$,对任一 $t > T_0$, $x \in X$,有

$$\| (e^{-tA} - e^{-t\lambda})x \| \geqslant e^{-t\mathrm{Re}\lambda}[1 - e^{-(\beta-\mathrm{Re}\lambda)t}] \| x \| \geqslant c_0 \| x \|,$$

以及 $e^{-tA}X$ 在 X 中稠,易知 $e^{-tA} - e^{-t\lambda}: X \to X$ 是一一映射,由 Banach 逆算子定理,$e^{-t\lambda} \in \rho(e^{-tA})(t \geqslant T_0)$,故 $\lambda \in \rho(A)$ 与 $\lambda \in \sigma(A)$ 矛盾.从而,结论 4°成立.

证 4°⇒2° 由 $\mathrm{Re}(A) > 0$,直接可得结论 2°中的估计式成立. □

下面讨论自治方程零解的稳定性.

设 A 是 Banach 空间 X 中的扇形算子,对某个 $0 \leqslant \alpha < 1$, X^α 有意义.考虑自治方程(11.4.4),其中 $f: X^\alpha \to X$ 是局部Lipschitz的.则对任意的初值 $u(0) = u_0$,方程(11.4.4)的解是唯一存在的.下设存在区间 J 是$[0, +\infty)$.

定义 11.6.3 自治方程在 J 上的解 $\tilde{u}(t)$ 称为吸引的,若存在 $\delta > 0$,使得$[t_0, +\infty)$上所有满足 $\| u(t_0) - \tilde{u}(t_0) \|_\alpha < \delta$ 的解 $u(t)$,有

$$\lim_{t \to +\infty} \| u(t) - \tilde{u}(t) \|_\alpha = 0.$$

定义 11.6.4 自治方程在 J 上的解 $\tilde{u}(t)$ 称为在 X^α 内是稳定,若对任给的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使得$[t_0, +\infty)$上所有满足 $\| u(t_0) - \tilde{u}(t_0) \|_\alpha < \delta$ 的解 $u(t)$,有

$$\| u(t) - \tilde{u}(t) \|_\alpha < \varepsilon, \quad \forall t \geqslant t_0.$$

特别,如果 $\tilde{u}(t)$ 还是吸引的,则称 $\tilde{u}(t)$ 是渐近稳定的.

对于一致稳定和一致渐近稳定,有如下定义.

定义 11.6.5 自治方程在 J 上的解 $\tilde{u}(t)$ 称为在 X^α 内是一致稳定的,若任给 $\varepsilon > 0$,存在仅与 ε 有关的 $\delta > 0$,对任意的 $t_1 \geqslant t_0$,使得满足条件 $\| u(t_1) - \tilde{u}(t_1) \|_\alpha < \delta$ 的任意解 $u(t)$ 在$[t_1, +\infty)$上存在且

$$\| u(t) - \tilde{u}(t) \|_\alpha < \varepsilon, \quad \forall t \geqslant t_1;$$

特别,如果还存在与 t_1, ε 无关的正数 δ_1 及 $T(\varepsilon) > 0$,使得满足条件 $\| u(t_1) - \tilde{u}(t_1) \|_\alpha < \delta_1$ 的任意解 $u(t)$,有

$$\| u(t) - \tilde{u}(t) \|_\alpha < \varepsilon, \quad \forall t \geqslant t_1 + T(\varepsilon).$$

则称 $\tilde{u}(t)$是一致渐近稳定的.

定理 11.6.3 设 $U=\{u\in X^{\alpha} \mid \|u\|_{\alpha}<r\}$, $f:U\to X$ 满足 $f(0)=0$ 且将 U 中的有界闭集映为 X 中的有界集,则

(1)如果自治方程(11.4.4)在 U 上有 Lyapunov 函数 $V(x)$满足

$$V(0)=0,\quad a(\|x\|_{\alpha})\leqslant V(x),\quad \forall x\in U,$$

其中 $a\in K[0,r]$,则该自治方程的零解是一致稳定的.

(2)更若存在 $c\in K[0,r]$使

$$\dot{V}(x)\leqslant -c(\|x\|_{\alpha}),\quad \forall x\in U,$$

则该零解还是一致渐近稳定的.

证明类似于定理 11.6.1.由 f 映有界闭集为有界集,并可以对解 $u(t)$进行延拓,使其存在区间为$[t_0,+\infty)$.

例 11.6.1 记 $I=(0,\pi)$,考虑反应扩散方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha u-\beta u^k, & \forall (x,t)\in I\times\mathbf{R}_+,\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & \forall t\in\mathbf{R}_+,\end{cases}\tag{11.6.9}$$

其中常数 $0\leqslant\alpha<1,\beta\geqslant 0,k$ 为奇数,则零解在 $H_0^1(0,\pi)$中一致渐近稳定.

证明 令

$$V(\varphi)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\varphi'^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\|\varphi;H_0^1\|^2,\quad\forall\varphi\in H_0^1(0,\pi),$$

设 $u(x,t)$是(11.6.9)满足初值条件 $u(x,0)=\varphi\in H_0^1(0,\pi)$的解,则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V(u(x,t))}{\mathrm{d}t}&=-\int_0^{\pi}u_{xx}u_t\mathrm{d}x\\ &=-\int_0^{\pi}u_{xx}(u_{xx}+\alpha u-\beta u^k)\mathrm{d}x\\ &=-\int_0^{\pi}u_{xx}^2\mathrm{d}x+\alpha\int_0^{\pi}u_x^2\mathrm{d}x-\beta k\int_0^{\pi}u_x^2u^{k-1}\mathrm{d}x\\ &\leqslant-(1-\alpha)\int_0^{\pi}u_x^2\mathrm{d}x=-(1-\alpha)\|u;H_0^1\|^2\end{aligned}$$

于是零解是一致渐近稳定的. □

第十二章　无穷维动力系统

20 世纪 80 年代,动力系统研究的一项重大成果是,发现相当多的带耗散结构的偏微分方程解的长期形态与有穷维系统具有某种本质上的一致性,主要有全局吸引子、吸引子维数和惯形流形[141~143],有关应用及非线性 Galerkin 方法,可参看文献[144~146].

§12.1　全局吸引子

设 H 是以 $d(\cdot,\cdot)$ 为度量的完备空间,$S=\{S(t)\mid t\geqslant 0\}$ 是 H 上的连续算子半群.当 $t>0$ 时,如果 $S(t)$ 是 H 上的双射,则可以定义算子 $S(-t)=S(t)^{-1}$,是 $S(t)H\subset H$ 到 H 上的映射.对集 $\mathscr{A}\subset H$,其 ω 极限集

$$L_\omega(\mathscr{A})=\bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s}S(t)\mathscr{A}},$$

其中闭包取于 H 中.类似地,如果存在的话,其 α 极限集

$$L_\alpha(\mathscr{A})=\bigcap_{s\leqslant 0}\overline{\bigcup_{t\leqslant s}S(-t)^{-1}\mathscr{A}}.$$

命题 12.1.1　$\varphi\in L_\omega(\mathscr{A})$,当且仅当存在 $\varphi_n\in\mathscr{A}$ 及序列 $t_n\to+\infty$ 使得

$$S(t_n)\varphi_n\to\varphi,\text{当 } n\to\infty;$$

$\varphi\in L_\alpha(\mathscr{A})$ 当且仅当 H 中存在收敛于 φ 的序列 $\{\psi_n\}$ 及序列 $t_n\to+\infty$ 使得

$$\varphi_n=S(t_n)\psi_n\in\mathscr{A},\quad\forall n\in\mathbf{N}.$$

证明　结论是显然的. □

定义 12.1.1　设 $X\subset H$,称 X 是半群 S 的正(负)不变集,若

$$S(t)X\subset X(S(t)X\supset X),\quad\forall t>0;$$

若 X 既是 S 的正不变集,又是负不变集,则称 X 是 S 的(泛函)不变集.

命题 12.1.2　$\varnothing\neq\mathscr{A}\subset H$ 且存在 $t_0>0$ 使 $\bigcup_{t\geqslant t_0}S(t)\mathscr{A}$ 是 H 中的相对紧集,则 $L_\omega(\mathscr{A})$ 是非空紧的不变集;类似地,如果对任一 $t\geqslant 0$,$S(t)^{-1}\mathscr{A}$ 非空且 $\bigcup_{t\geqslant t_0}S(t)^{-1}\mathscr{A}$ 是相对紧的,则 $L_\alpha(\mathscr{A})$ 是非空紧的不变集.

证明　由条件及 $L_\omega(\mathscr{A})$ 的定义,知其非空且紧.再利用 $S(t)$ 的连续性和命题 12.1.1,类似于命题 2.2.3 可证 $L_\omega(\mathscr{A})$ 的不变性.类似可证 $L_\alpha(\mathscr{A})$ 的结论. □

设 $x\in H$,$X,Y\subset H$,定义

$$d(x,Y)=\inf_{y\in Y}d(x,y).$$

$$d(X, Y) = \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} d(x, y).$$

定义 12.1.2 集合$\mathscr{A}\subset H$ 称为半群 S 的吸引子(attractor),若$\mathscr{A}$是 S 的不变集,且存在$\mathscr{A}$的一个开邻域 $\mathscr{U}$ 使得

$$d(S(t)u_0,\mathscr{A}) \to 0, \quad 当\ t \to +\infty, \forall u_0 \in \mathscr{U},$$

此时,最大的开集 $\mathscr{U}$ 称为$\mathscr{A}$的吸引盆(basin);称$\mathscr{A}$一致吸引集 $\mathscr{B}\subset\mathscr{U}$,若

$$d(S(t)\mathscr{B},\mathscr{A}) \to 0, \quad 当\ t \to +\infty,$$

也简称$\mathscr{A}$吸引集 $\mathscr{B}$;称$\mathscr{A}$吸引 $\mathscr{U}$ 的有界集(或紧集),若$\mathscr{A}$一致吸引 $\mathscr{U}$ 的每个有界集(或紧集).

显然,若$\mathscr{A}$是 S 的吸引子,则存在$\mathscr{A}$的开邻域 $\mathscr{U}$,使$\mathscr{A} = L_\omega\mathscr{U}$;而所有这样开集 $\mathscr{U}$ 的并,就是$\mathscr{A}$的吸引盘.

定义 12.1.3 设 $\mathscr{U}$ 是 H 中含$\mathscr{A}\subset H$ 的开集,称$\mathscr{A}$在 $\mathscr{U}$ 中是吸收的(absorbing),若对 $\mathscr{U}$ 中的任一有界集 $\mathscr{B}\subset\mathscr{U}$,存在 $t_0 = t_0(\mathscr{B})$使得 $S(t)\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$ 对任一 $t>t_0$ 成立.

定义 12.1.4 称$\mathscr{A}\subset H$ 是半群 S 的全局吸引子,若$\mathscr{A}$是紧吸引子且吸引 H 中的每个有界集,即它的吸引盘是全空间 H.

显然,全局吸引子如果存在则是唯一的,并且在所有的有界吸引子中是极大的,故又称为极大吸引子.

命题 12.1.3 设 $\mathscr{U}$ 是 H 中开凸连通集且 $K\subset\mathscr{U}$ 是吸引紧集的紧不变集,则 K 是连通的.

证明 记 K 的凸闭包为 $\mathscr{B}$,是 $\mathscr{U}$ 中的紧连通集,故 $S(t)\mathscr{B}$ 也是紧连通集.若 K 不连通,则存在不交开集 $\mathscr{U}_1$ 和 $\mathscr{U}_2$,使得 $\mathscr{U}_i\cap K\neq\varnothing, i=1,2, K\subset\mathscr{U}_1\cup\mathscr{U}_2$.由于 $K\subset\mathscr{B}$,故 $K=S(t)K\subset S(t)\mathscr{B}$,于是 $\mathscr{U}_i\cap S(t)\mathscr{B}\neq\varnothing, i=1,2$,但 $\mathscr{U}_1\cup\mathscr{U}_2$ 不能覆盖 $S(t)\mathscr{B}$.因而,对每个 $n\in\mathbf{N}$,存在 $x_n\in S(t)\mathscr{B}$ 但 $x_n \overline{\in} \mathscr{U}_1\cup\mathscr{U}_2$.集$\{x_n\}$是 $S(t)\mathscr{B}$ 中的相对紧集,且被 K 吸引,故至少存在一个聚点 $x\in K$ 但 $x\overline{\in}\mathscr{U}_1\cup\mathscr{U}_2$,与前设矛盾,从而结论成立. □

定理 12.1.1 设 S 是 H 上的连续半群,若存在开集 $\mathscr{U}$ 及 $\mathscr{U}$ 中的有界吸收集 $\mathscr{B}$,对某个 $t_1>0$ 使 $S(t_1)\mathscr{B}$ 是相对紧集,则$\mathscr{A} = L_\omega(\mathscr{B})$是吸引 $\mathscr{U}$ 中有界集的 $\mathscr{U}$ 中极大有界紧吸引子;更若 H 是 Banach 空间,$\mathscr{U}$ 是凸连通的,则$\mathscr{A}$也是连通的.

证明 首先,由有界吸收集 $\mathscr{B}\subset\mathscr{U}$ 自然吸收自身,存在 $t_0>0$,当 $t\geqslant t_0$ 时,$S(t)\mathscr{B}\subset\mathscr{B}$.置 $t_* = t_0+t_1$,当 $t\geqslant t_*$时,有

$$S(t)\mathscr{B} = S(t_1)S(t-t_1)\mathscr{B} \subset S(t_1)\mathscr{B},$$

从而

$$\bigcup_{t\geqslant t_*} S(t)\mathscr{B} \subset S(t_1)\mathscr{B}$$

是相对紧集,由命题 12.1.2 知$\mathscr{A}=L_\omega(\mathscr{B})$是非空紧致不变集.

下证$\mathscr{A}$是$\mathscr{U}$中吸引子.若其不然,对$\mathscr{U}$中某个有界集$\mathscr{B}_0$,存在$\delta>0$和序列$t_n\to\infty$使得

$$d(S(t_n)\mathscr{B}_0,\ \mathscr{A})\geqslant\delta>0,\quad\forall n\in\mathbf{N}.$$

对每个n,在上式中存在$b_n\in\mathscr{B}_0$,使得

$$d(S(t_n)b_n,\mathscr{A})\geqslant\delta/2>0,\quad\forall n\in\mathbf{N}.\tag{12.1.1}$$

由于$\mathscr{B}$吸收$\mathscr{B}_0$,即存在t',使得

$$S(t)\mathscr{B}_0\subset\mathscr{B},\quad\forall t\geqslant t'.$$

再由$\{S(t_n)b_n\}$的相对紧性,即至少有一个聚点β,使得

$$\beta=\lim_{n_i\to\infty}S(t_{n_i})b_{n_i}=\lim_{n_i\to\infty}S(t_{n_i}-t')S(t')b_{n_i},$$

而$S(t')b_{n_i}\in\mathscr{B}$,由命题 12.1.1 知$\beta\in\mathscr{A}$,这与(12.1.1)矛盾,故所言成立.

其次,设$\mathscr{A}'\supset\mathscr{A}$是极大有界吸引子,由$\mathscr{B}$的吸收性,对充分大的$t$有

$$\mathscr{A}'=S(t)\mathscr{A}'\subset\mathscr{B},$$

于是

$$\mathscr{A}'=L_\omega(\mathscr{A}')\subset L_\omega(\mathscr{B})=\mathscr{A},$$

即$\mathscr{A}$是极大的.最后,由命题 12.1.3 可证$\mathscr{A}$的连通性. □

对某些耗散系统,定理 12.1.1 中$S(t)$的紧致性条件是不满足的.

假设H是 Banach 空间,

$$S(t)=S_1(t)+S_2(t),\quad\forall t\in\mathbf{R}_+.\tag{12.1.2}$$

其中,对充分大的t,$S_1(t)$是一致紧的,即对每个有界集$\mathscr{B}$,存在$t_1=t_1(\mathscr{B})$使$\bigcup_{t\geqslant t_1}S(t)\mathscr{B}$在$H$中是相对紧集;而$S_2(t)$: $H\to H$连续且对每个有界集$\mathscr{C}\subset H$满足

$$r_{\mathscr{C}}(t)=\sup_{\varphi\in\mathscr{C}}\|S_2(t)\varphi\|_H\to 0,\quad 当\ t\to\infty.\tag{12.1.3}$$

命题 12.1.4　设连续半群S满足条件(12.1.2),则对于H中的任一有界集$\mathscr{B}$,有$L_\omega(\mathscr{B})$是非空紧致不变集.

证明　设$\{\varphi_n\}$有界且$t_n\to\infty$,则由条件(12.1.3),有

$$S_2(t_n)\varphi_n\to 0,\quad 当\ n\to\infty.\tag{12.1.4}$$

再由(12.1.2)知

$$S(t_n)\varphi_n\ 收敛\Leftrightarrow S_1(t_n)\varphi_n\ 收敛.\tag{12.1.5}$$

记

$$L_{\omega_1}(\mathscr{B})=\bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s}S_1(t)\beta},$$

其中未要求$S_1(t)$是半群,但命题12.1.1对$L\omega_1(\mathscr{B})$依然成立,再利用(12.1.4)和(12.1.5)易证

$$L_{\omega}(\mathscr{B}) = L_{\omega_1}(\mathscr{B}).$$

于是,由 $S_1(t)$ 的一致紧性和命题 12.1.2 知 $L_{\omega}(\mathscr{B})$ 是非空紧集.

下证 $L_{\omega}(\mathscr{B})$ 具不变性. 首先,对任一 $\psi \in S(t)L_{\omega}(\mathscr{B})$,存在 $\varphi \in L_{\omega}(\mathscr{B})$ 使 $\psi = S(t)\varphi$;再由命题 12.1.1,存在序列 $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{B}$ 及 $t_n \to \infty$,使 $n \to \infty$ 时,有 $S(t_n)\varphi_n \to \varphi$. 于是 $t + t_n \to \infty$ 且由 $S(t)$ 连续有

$$S(t + t_n)\varphi_n = S(t)S(t_n)\varphi_n \to S(t)\varphi = \psi, \quad \text{当 } n \to \infty,$$

即 $\psi \in L_{\omega}(\mathscr{B})$. 反之,对任一 $\varphi \in L_{\omega}(\mathscr{B})$,同样存在上述性质的 φ_n 和 t_n. 注意到 $t_n > t$ 时,

$$S(t_n - t)\varphi_n = S_1(t_n - t)\varphi_n + S_2(t_n - t)\varphi_n.$$

由(12.1.4),当 $n \to \infty$ 时 $S_2(t_n - t)\varphi_n \to 0$. $\{S_1(t_n - t)\varphi_n\}$ 是相对紧集,故有收敛子列,下标记为 n_i,收敛于 $\psi \in L_{\omega}(\mathscr{B})$. 于是,

$$\varphi = \lim_{n_i \to \infty} S(t)S(t_{n_i} - t)\varphi_{n_i} = S(t)\psi \in S(t)L_{\omega}(\mathscr{B})$$

故结论成立. □

定理 12.1.2 设 S 是 Banach 是空间 H 上满足条件(12.1.2)的连续半群,$\mathscr{B}$ 是开集 $\mathscr{U} \subset H$ 中的有界吸收集,则定理 12.1.1 的结论成立.

证明 由命题 12.1.4 知 $\mathscr{A} = L_{\omega}(\mathscr{B})$ 是非空紧致不变集. 其余证明类似于定理 12.1.1,只须注意到对(12.1.1)中的 $\{b_n\} \subset \mathscr{B}_0$,利用

$$S(t_n)b_n = S_1(t_n)b_n + S_2(t_n)b_n$$

及(12.1.5),由 $\{S_1(t_n)b_n\}$ 的相对紧性知 $\{S(t_n)b_n\}$ 的相对紧性. 从而可证结论成立. □

§ 12.2 吸引子的维数

在一定条件下,全局吸引子,即系统的长期的动力形态,是有限维的[142].

设 H 是 Hilbert 空间,$L \in \mathscr{L}(H)$ 是紧算子,于是 $L^* L$ 是自伴非负紧算子. 算子 $(L^* L)^{1/2}$ 的特征向量 $\{e_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ 组成 H 的标准正交基,对应的特征值记为 $\alpha_i = \alpha_i(L)$,满足

$$\begin{aligned} &\alpha_1(L) \geqslant \alpha_2(L) \geqslant \cdots \geqslant 0, \\ &(L^* L)^{1/2} e_i = \alpha_i e_i, \quad \forall i \in \mathbf{N}. \end{aligned} \tag{12.2.1}$$

按照古典的极小—极大原理[(H)],有

$$\alpha_m(L) = \sup_{\substack{F \subset H \\ \dim F = m}} \inf_{\substack{\varphi \in F \\ \|\varphi\| = 1}} \| L\varphi; H \|. \tag{12.2.2}$$

若 $L \in \mathscr{L}(H)$ 不是紧算子,同样用上式定义数 $\alpha_m(L)$,此时(12.2.1)式成立且 $\alpha_1(L) \leqslant \| L; \mathscr{L}(H) \|$. 在这两种情况,均定义

$$\omega_m(L)=\alpha_1(L)\cdots\alpha_m(L),\quad \forall\, m\in\mathbf{N},\tag{12.2.3}$$

可以证明如下命题，而略去其证明.

命题 12.2.1　设 $L, L'\in\mathcal{L}(H)$，则

$$\omega_m(LL')\leqslant\omega_m(L)\omega_m(L').$$

记

$$H_v=\mathrm{Span}\{e_j\,|\alpha_j>0, j\in J\},$$

当 L 是紧的或 L 非紧但 $H_v=H$ 时，$J=\mathbf{N}$；当 L 非紧且 $H_v\neq H$ 时，$J=\{1,2,\cdots,n_0\}$. 于是有 H 的直和分解 $H=H_v\oplus H_v^{\perp}$. 设 $\mathscr{E}$ 是 H_v 中的椭球，其轴的方向沿着向量 Le_j，长度为 $\alpha_j(L)>0$.

命题 12.2.2　在如上假设和记号下，设 B 是 H 中的单位球.

(1)若 L 紧或 L 非紧但 $H_v=H$，则 $L(B)\subseteq\mathscr{E}$.

(2)若 L 非紧且 $H_v\neq H$，则 $L(B)$ 含于 $B(0,\alpha_\infty(L))\subset H_v^{\perp}$ 与椭球 $\mathscr{E}$ 的积.

设 H 上的连续半群 $S=\{S(t)\,|\,t\in\mathbf{R}_+\}$ 在 $u_0\in H$ 点是 Fréchet 可微的，其导算子记为 $L(t,u_0)\in\mathcal{L}(H)$.

定义 12.2.1　若极限

$$\lambda_j(u_0)=\lim_{t\to\infty}(\alpha_j(L(t,u_0)))^{1/t},\quad j\in\mathbf{N}$$

存在，则称之为 $S(t)$ 在点 u_0 处的 Lyapunov 数，其对应的 Lyapunov 指数

$$\mu_j(u_0)=\log\lambda_j(u_0),\quad j\in\mathbf{N};$$

在离散的情况($t\in\mathbf{N}$ 时)，记

$$\lambda_j(u_0)=\lim_{n\to\infty}\{\alpha_j(L^n)\}^{1/n},\quad \mu_j(u_0)=\log\lambda_j(u_0).$$

当极限不存在时，有时采用如下定义

$$\Lambda_j(u_0)=\limsup_{t\to\infty}(\alpha_j(L(t,u_0)))^{1/t},\quad j\in\mathbf{N};$$

$$\mu_j(u_0)=\log\Lambda_j(u_0).$$

在遍历理论中，若 $S(t)$ 是保测变换，则 $\lambda_j(u_0)$ 是几乎处处存在的. 下面，采用不变集上"一致 Lyapunov 数"的概念. 它在该不变集上总是有定义的. 首先给出如下引理.

引理 12.2.1　设函数 φ

$$\varphi(t+s)\leqslant\varphi(t)\varphi(s),\quad \forall\, t,s\in\mathbf{R}_+,\tag{12.2.4}$$

对某个 $0<a<b<\infty$ 有

$$\sup_{t\in[a,b]}\varphi(t)<\infty,\tag{12.2.5}$$

则极限 $\lim\limits_{t\to\infty}(\varphi(t))^{1/t}$ 存在且等于

$$\tau=\inf_{t>0}\{(\varphi(t))^{1/t}\}.$$

证明 由条件(12.2.5)知 φ 在任一区间$[a,c]$上有界. 设 $p,q\in\mathbf{R}_+$, $q\geqslant p\geqslant a$, 取 $k\in\mathbf{N}$ 使得

$$(k+1)p\leqslant q<(k+2)p.$$

由条件(12.2.4)有

$$\varphi(q)\leqslant\varphi(kp)\varphi(q-kp)\leqslant\varphi(p)^k\varphi(q-kp),$$

$$\varphi(q)^{1/q}\leqslant(\varphi(p)^{1/p})^{kp/q}\cdot(\sup_{p\leqslant t\leqslant 2p}\varphi(t))^{1/q}.$$

在上式中先固定 p 不变, 使 $k,q\to\infty$, 得

$$\lim_{q\to\infty}\sup\varphi(q)^{1/q}\leqslant\varphi(p)^{1/p}.$$

再使 $p\to\infty$ 并取其下极限, 得

$$\lim_{q\to\infty}\sup\varphi(q)^{1/q}\leqslant\lim_{p\to\infty}\inf\varphi(p)^{1/p},$$

故所证极限存在. 再对任一 $\varepsilon>0$, 取 p_ε 使 $\varphi(p_\varepsilon)^{1/p_\varepsilon}\leqslant\tau+\varepsilon$, 显然

$$\lim_{p\to\infty}\varphi(p)^{1/p}=\lim_{k\to\infty}\varphi(kp_\varepsilon)^{1/kp_\varepsilon}\leqslant\tau+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知后一断言成立. □

设 $X\subset H$ 是 Hilbert 空间 H 上连续半群 $S=\{S(t)\mid t\in\mathbf{R}_+\}$ 的泛函不变集, S 在 X 上一致可微, 即对每个 $u\in X$, 存在 H 中的线性连续算子 $L(t,u)\in\mathscr{L}(H)$, 使得 $\varepsilon\to 0$ 时, 有

$$\sup_{\substack{u,v\in X\\0<\|u-v\|\leqslant\varepsilon}}\frac{\|S(t)u-S(t)v-L(t,u)(u-v)\|}{\|u-v\|}\to 0.\quad(12.2.6)$$

并且还假设存在 $m>0$, 使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\sup_{u\in X}\|L(t,u);\mathscr{L}(H)\|\leqslant m<+\infty.\quad(12.2.7)$$

为简便起见, 仅就离散的情况, 即 $t\in\mathbf{N}$, 进行叙述. 记 $S(1)=f$, 设 f 在其不变集 X 上一致可微, 即对任一 $u\in X$, 存在 $L(u)\in\mathscr{L}(H)$, 使得(12.2.6)成立, 其中 $S(t)$ 改为 f; 并且还假定 $L(u)$ 在 X 上一致有界, 即存在 $m>0$ 使得

$$\sup_{u\in X}\|L(u);\mathscr{L}(\mathrm{H})\|\leqslant \mathrm{m}<+\infty.\quad(12.2.8)$$

设 $p\in\mathbf{N}$, 则

$$L_p(u)=L(f^{p-1}(u))\circ\cdots\circ L(f(u))\circ L(u),$$

对 f^p 同样满足(12.2.6), 且由(12.2.8)有

$$\sup_{u\in X}\|L_p(u);\mathscr{L}(H)\|\leqslant m^p<+\infty,\quad\forall p\in\mathbf{N}.\quad(12.2.9)$$

对于, $j,p\in\mathbf{N}$, $u\in X$, 利用(12.2.3)记

$$\bar{\omega}_j=\sup_{u\in X}\omega_j(L(u));$$

$$\bar{\omega}_j(p)=\sup_{u\in X}\omega_j(L_p(u)).$$

引理 12.2.2 在如上假设条件下, 下列极限存在且

$$\lim_{p\to\infty}(\bar{\omega}_j(p))^{1/p} = \inf_{p\in N}\{\bar{\omega}_j(p)^{1/p}\}.$$

证明　由命题 12.1.1 及(12.2.8),(12.2.9),不难核验

$$\omega_j(L(u)) \leqslant \| L(u);\mathscr{L}(H)\|, \quad \bar{\omega}_j \leqslant m,$$

$$\omega_j(L_p(u)) \leqslant \| L_p(u);\mathscr{L}(H)\|, \quad \bar{\omega}_j(p) \leqslant m^p,$$

即 $\bar{\omega}_j(p)$满足条件(12.2.5).同时,由

$$\begin{aligned}
&\omega_j(L_{p+q}(u))\\
&=\omega_j(L(f^{p+q-1}(u))\circ\cdots\circ L(u))\\
&\leqslant\omega_j(L(f^{p+q-1}(u))\circ\cdots\circ L(f^q(u)))\cdot\omega_j(L(f^{q-1}(u))\circ\cdots\circ L(u))\\
&\leqslant\omega_j(L(f^{p-1}(v))\circ\cdots\circ L(v))\cdot\omega_j(L(f^{q-1}(u))\circ\cdots\circ L(u))\\
&\leqslant\bar{\omega}_j(p)\cdot\bar{\omega}_j(q),
\end{aligned}$$

其中 $v=f^q(u)\in X$,得

$$\bar{\omega}_j(p+q)\leqslant\bar{\omega}_j(p)\cdot\bar{\omega}_j(q), \quad \forall j,p,q\in\mathbf{N}.$$

由引理 12.2.1 知结论成立.　□

由引理 12.2.2,对 $p\in\mathbf{N}$,下列极限存在,

$$\Lambda_1 = \lim_{p\to\infty}(\bar{\omega}_1(p))^{1/p},$$

$$\Lambda_m = \lim_{p\to\infty}\left(\frac{\bar{\omega}_m(p)}{\bar{\omega}_{m-1}(p)}\right)^{1/p}, \quad m\geqslant 2.$$

定义 12.2.2　称 Λ_m 为 X 上的全局 Lyapunov 数,而称

$$\mu_m = \log\Lambda_m, \quad m\geqslant 1$$

为 X 上的全局 Lyapunov 指标.

类似可给出连续情况的相应定义,只需将 $p\in\mathbf{N}$ 改为 $t\in\mathbf{R}_+$ 即可.Lyapunov 数刻画了 X 上由半群 S 产生的 m 维体积最坏的无穷小形变.

下面将使用的 Hausdorff 维数和盒维数和概念见第四章.只是在记号上分别记 $\mathscr{H}^s_\delta(A)$和 $\mathscr{H}^s(A)$为 $\mu_H(A,s,\delta)$和 $\mu_H(A,s)$;记 $N_\delta(A)$为 $N_A(\delta)$,后者仍表示覆盖 A 的半径为 δ 的球的最小个数.在有的文献中,称盒维数为 fractal 维数或 capacity 维数,这里采用"盒维数"这一术语.

记 H 中椭球 $\mathscr{E}$ 轴的长度为 $\alpha_j(\mathscr{E}),j\geqslant 1$,且满足

$$\alpha_1(\mathscr{E})\geqslant\alpha_2(\mathscr{E})\geqslant\cdots.$$

当 $n\in\mathbf{N}$ 时,$\omega_n(\mathscr{E})$如(12.2.3),当 $d=n+s,n\in\mathbf{N},0<s<1$ 时,

$$\omega_d(\mathscr{E}) = \omega_n(\mathscr{E})^{1-s}\omega_{n+1}(\mathscr{E})^s = \omega_n(\mathscr{E})\alpha_{n+1}(\mathscr{E})^s.$$

显然,映射 $d\in[1,\infty]\mapsto\{\omega_d(\mathscr{E})^{1/d}\}$是不增的.下面先给出两个关于覆盖的引理.

引理 12.2.3　设 $d=n+s,n\in\mathbf{N},0<s\leqslant 1$,对任一 r,$\alpha_{n+1}(\mathscr{E})\leqslant r\leqslant$

$\alpha_1(\mathscr{E})$,则覆盖椭球 $\mathscr{E}$ 的半径为 $\sqrt{n+1}r$ 的球的最小个数

$$n_{\mathscr{E}}(\sqrt{n+1}r) \leqslant 2^n \frac{\omega_\tau(\mathscr{E})}{r^\tau}, \tag{12.2.10}$$

其中 τ 是不超过 n 且使得 $r\leqslant\alpha_\tau(\mathscr{E})$的最大整数.从而,如果 $\varepsilon\geqslant(\omega_d(\mathscr{E}))^{1/d}$,则

$$\mu_H(\mathscr{E},d,\sqrt{n+1}\varepsilon) \leqslant \beta_d\omega_d(\mathscr{E}), \quad \beta_d = 2^n(n+1)^{d/2}. \tag{12.2.11}$$

证明 设$\{\varphi_j\}_{j\geqslant1}$是 H 的规范正交基且依次对应 $\mathscr{E}$ 的轴,正交投影

$$Q:H \to \operatorname{span}\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}.$$

记

$$\alpha_i = \alpha_i(\mathscr{E}), \quad p = \alpha_{n+1},$$

则 $\mathscr{E}$ 含于 QH 中集 $\prod\limits_{i=1}^n[-\alpha_i,\alpha_i]$ 与 $(I-Q)H$ 中球$B(0,\rho)$的积内.前者被边长为 $2r$ 的N 个立方体所覆盖,

$$N \leqslant \prod_{i=1}^n\left(\left[\frac{\alpha_i}{r}\right]+1\right) \leqslant \prod_{i=1}^\tau\left(\frac{2\alpha_i}{r}\right)2^{n-1} \leqslant 2^n\frac{\omega_\tau(\mathscr{E})}{r^\tau},$$

而每个立方体又被半径为 $\sqrt{n+1}r$ 的球所覆盖,故(12.2.10)成立.

对于 $\tau=n$,取 $r=\rho$ 的情况,应用(12.2.10)式及

$$\rho \leqslant (\omega_n(\mathscr{E}))^{1/n} \leqslant (\omega_d(\mathscr{E}))^{1/d} \leqslant \varepsilon,$$

有

$$\mu_H(\mathscr{E},d,\sqrt{n+1}\varepsilon) \leqslant \mu_H(\mathscr{E},d,\sqrt{n+1}\rho)$$

$$\leqslant 2^n\frac{\omega_n(\mathscr{E})}{\rho^n}\cdot(n+1)^{d/2}\rho^d = 2^n(n+1)^{d/2}\omega_n(\mathscr{E}),$$

即(12.2.10)成立. □

引理 12.2.4 设 $d=n+s, n\in\mathbf{N}, n\geqslant1, 0<s\leqslant1$,且 $\alpha_1(\mathscr{E})\leqslant m, \omega_d(\mathscr{E})\leqslant k\leqslant m^d$,则对任一 $\eta>0$ 有 $\mathscr{E}+B(0,\eta)$含于椭球 $\mathscr{E}'$中,使得

$$\omega_d(\mathscr{E}') \leqslant (1+K\eta)^d k, \quad K = \left(\frac{m^n}{k}\right)^{1/s}.$$

证明 同样记 $\rho=\alpha_{n+1}(\mathscr{E})$. 由于 α_j 非增, $\mathscr{E}$可嵌入椭球 $\bar{\mathscr{E}}$ 使得 $\omega_d(\bar{\mathscr{E}})=k\leqslant m^d$,且对任一 $j\geqslant n+1, \bar{\alpha}_j=\alpha_j(\bar{\mathscr{E}})=\rho$,而 $\bar{\alpha}_1=\alpha_1(\mathscr{E})\leqslant m$. 于是

$$k = \alpha_1\cdots\alpha_n(\alpha_{n+1})^s \leqslant m^n\rho^s, \text{或 } \rho \geqslant K^{-1}.$$

因而,$B(0,\rho)$含于 $\bar{\mathscr{E}}$,

$$\bar{\mathscr{E}}+B(0,\eta) \subset (1+\frac{\eta}{\rho})\bar{\mathscr{E}} \subset (1+K\eta)\bar{\mathscr{E}}.$$

取 $\mathscr{E}'=(1+K\eta)\bar{\mathscr{E}}$，可证结论成立. □

定理 12.2.1　设 f 在其紧不变集 X 上一致可微且满足条件(12.2.8)，若存在 $d=n+s$ 如前述，使得

$$\sup_{u\in X}\omega_d(L(u))\leqslant k<1. \tag{12.2.12}$$

其中

$$\omega_d(L(u))=\omega_n(L(u))^{1-s}\omega_{n+1}(L(u))^s,$$

则 $\dim_H(X)\leqslant d$.

证明　step1　对任一 $p\in\mathbf{N}$，由条件所设知(12.2.9)及

$$\bar{\omega}_d(p)=\sup_{u\in X}\omega_d(L_p(u))\leqslant k^p<1 \tag{12.2.13}$$

成立. 由于 f^p 同样满足(12.2.6)，必要时可用 f^p 代替 f，由上式推知(12.2.12)中的 k 可任意小，特别，可设

$$\sqrt{d+1}k^{1/d}\leqslant\frac{1}{4},\quad \beta_d k\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{d+1},$$

其中 β_d 如(12.2.11)所述.

step2　同时，还设 $k\leqslant m^d$，又取 $0<\eta<1/K$，其中 K 如引理 12.2.4. 于是，选择适当的 $\varepsilon>0$，由(12.2.6)有

$$\sup_{\substack{u,v\in X\\ 0<\|u-v\|\leqslant\varepsilon}}\frac{\|fv-fu-L(u)(v-u)\|}{\|v-u\|}\leqslant\eta.$$

由于 X 是紧集，可被 $\{B(u_i,r_i)\mid i=1,\cdots,N\}$ 覆盖，其中半径 $r_i\leqslant\varepsilon$，$i=1,\cdots,N$. 于是，

$$X=fX\subset\bigcup_{i=1}^N f(B(u_i,r_i)\cap X),$$

并且，对每个 $v\in B(u_i,r_i)$，$i=1,2,\cdots,N$，有

$$\|fv-fu_i-L(u_i)(v-u_i)\|\leqslant\|v-u_i\|. \tag{12.2.14}$$

可置 $B(u_i,r_i)=u_i+B_i$，$B_i=B(0,r_i)$. 从命题 12.2.2 知 $L(u_i)(B_i)$ 含于椭球 $\mathscr{E}_i$，其轴长度为 $r_i\alpha_j(L(u_i))$，$j\in\mathbf{N}$，$i=1,\cdots,N$. 于是，由(12.2.14)，有

$$f(u_i+B_i)\subset fu_i+\mathscr{E}_i+B(0,\eta r_i).$$

由于

$$\omega_d(\mathscr{E}_i)=r_i^d\omega_d\left(\frac{\mathscr{E}_i}{r_i}\right)=r_i^d\omega_d(L(u_i))\leqslant kr_i^d,$$

且从引理 12.2.4，$\mathscr{E}_i+B(0,\eta r_i)$ 含于椭球 $\mathscr{E}_i'$ 使得

$$\omega_d(\mathscr{E}_i')(1+K\eta)^d kr_i^d\leqslant 2^d kr_i^d,\quad i=1,\cdots,N,$$

于是，X 被 $\{fu_i+\mathscr{E}_i'\mid i=1,\cdots,N\}$ 覆盖，其中 $\mathscr{E}'$ 满足上式.

step3　再利用引理 12.2.3 的(12.2.11)和前设的 k，有

$$\mu_H(\mathscr{E}_i',d,\varepsilon/2)\leqslant\mu_H(\mathscr{E}_i',d,\sqrt{d+1}k^{1/d}\varepsilon)$$

$$\leqslant \mu_H(\mathscr{E}_i', d, \sqrt{n+1}k^{1/d}r_i)$$

$$\leqslant \beta_d\omega_d(\mathscr{E}_i') \leqslant 2^d k\beta_d r_i^d \leqslant \frac{1}{2}r_i^d.$$

于是

$$\mu_H(X, d, \varepsilon/2) \leqslant \sum_{i=1}^{N}\mu_H(\mathscr{E}_i', d, \varepsilon/2) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} r_i^d.$$

再由 $\mu_H(X, d, \varepsilon)$的定义,有

$$\mu_H(X, d, \varepsilon/2) \leqslant \frac{1}{2}\mu_H(X, d, \varepsilon),$$

从而 $\mu_H(X, d, \varepsilon/2^j) \leqslant 2^{-j}\mu_H(X, d, \varepsilon)$, 令 $j \to \infty$ 得 $\mu_H(X, d) = 0$, 即结论成立. □

定理 12.2.2 条件如定理 12.2.1 所述,仅将(12.2.12)代换为

$$\bar{\omega}_j\bar{\omega}_{n+1}^{(d-j)/(n+1)} < 1, \quad j = 1, \cdots, n, \tag{12.2.15}$$

且 $d > 1$, 则 $\dim_B(X) \leqslant d$.

证明 在(12.2.15)中令 $j = n$, 有 $\bar{\omega}_d < 1$. 采用定理 12.2.1 证明中的记号, 并记

$$\bar{\alpha}_j = \sup_{u\in X}\alpha_j(L(u)), \qquad \bar{\alpha}_j(p) = \sup_{u\in X}\alpha_j(L_p(u)), \quad j \geqslant 1.$$

设$\{B(u_i, r_i) \mid i = 1, \cdots, N\}$是 X 满足条件 $r_i < \varepsilon (i = 1, \cdots, N)$的最少个数的覆盖, 于是 $N = n_X(\varepsilon)$, $r_i = \varepsilon$, $i = 1, \cdots, N$. 同时, X 又可被$\{fu_i + \mathscr{E}'_i \mid i = 1, \cdots, N\}$覆盖. 取半径为 $2\sqrt{d+1}\varepsilon\bar{\alpha}_{n+1}$的球覆盖 X 和 $\mathscr{E}'_i$, 显然

$$n_X(2\sqrt{d+1}\varepsilon\bar{\alpha}_{n+1}) \leqslant n_X(\varepsilon)\max_{1\leqslant i\leqslant N} n_{\mathscr{E}'_i}(2\sqrt{d+1}\varepsilon\bar{\alpha}_{n+1}). \tag{12.2.16}$$

又置 $r = 2\varepsilon\bar{\alpha}_{n+1}$使其对适当的 ε 满足引理 12.2.3 的条件. 在引理 12.2.4 的证明中 $\mathscr{E}'_i = (1 + K\eta)\bar{\mathscr{E}}_i$ 且对任一 $j \geqslant n + 1$ 有 $\alpha_j(\bar{\mathscr{E}}_i) = \alpha_{n+1}(\mathscr{E})$, 于是

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1}(\mathscr{E}'_i) &= (1 + K\eta)\alpha_{n+1}(\mathscr{E}_i)\\ &= (1 + K\eta)r_i\alpha_{n+1}(L(u_i))\\ &\leqslant (1 + K\eta)r_i\bar{\alpha}_{n+1} \leqslant 2\varepsilon\bar{\alpha}_{n+1} = r.\end{aligned}$$

其中 $\eta < 1/K$. 利用(12.2.10)与 $\bar{\omega}_1 = \bar{\alpha}_1 \geqslant \bar{\alpha}_{n+1}$有

$$\begin{aligned}n_{\mathscr{E}'_i}(2\sqrt{n+1}\varepsilon\bar{\alpha}_{n+1}) &\leqslant \max\left\{1, \max_{1\leqslant j\leqslant n} 2^n\frac{\omega_j(\mathscr{E}'_i)}{(2\varepsilon\bar{\alpha}_{n+1})^j}\right\}\\ &\leqslant \max\left\{1, \max_{1\leqslant j\leqslant n} 2^n r_i^j\frac{\omega_j(L(u_i))}{(\varepsilon\bar{\alpha}_{n+1})^j}\right\}\\ &\leqslant 2^n\max_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{\bar{\omega}_j}{(\bar{\alpha}_{n+1})^j}.\end{aligned}$$

联系(12.2.16)式,得,

$$n_X(2\sqrt{d+1}\varepsilon\bar{\alpha}_{n+1}) \leqslant 2^d n_X(\varepsilon)\max_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{\bar{\omega}_j}{(\bar{\alpha}_{n+1})^j}.$$

类似于定理 12.2.1 中 step1 的证明,对充分大的 $p\in\mathbf{N}$,以 $\bar{\alpha}_{n+1}(p)$和 $\bar{\omega}_j(p)$代换 $\bar{\alpha}_{n+1}$和 $\bar{\omega}_j$,上式仍然成立.显然,$\bar{\alpha}_{n+1}(p)\leqslant(\bar{\omega}_{n+1}(p))^{1/(n+1)}$,于是上式即

$$(\alpha\varepsilon)^d n_X(\alpha\varepsilon) \leqslant \theta\varepsilon^d n_X(\varepsilon), \tag{12.2.17}$$

其中

$$\alpha = 2\sqrt{d+1}\,\bar{\alpha}_{n+1}(p),$$

$$\theta = 2^{2d}(d+1)^{d/2}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{\bar{\omega}_j(p)(\bar{\omega}_{n+1}(p))^{(d-j)/(n+1)}\}$$

$$\leqslant 2^{2d}(d+1)^{d/2}\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}[\bar{\omega}_j(\bar{\omega}_{n+1})^{(d-j)/(n+1)}]\}^p.$$

可以证明

$$\bar{\alpha}_{n+1} \leqslant \bar{\omega}_j(\bar{\omega}_{n+1})^{(d-j)/(n+1)},\quad j=1,\cdots,n,$$

$$\bar{\alpha}_{n+1}(p) \leqslant \bar{\omega}_j(p)(\bar{\omega}_{n+1}(p))^{(d-j)/(n+1)}$$

$$\leqslant\{\bar{\omega}_j(\bar{\omega}_{n+1})^{(d-j)/(n+1)}\}^p,\quad j=1,\cdots,n.$$

利用条件(12.2.15),对充分大的 $p\in\mathbf{N}$,有 $\alpha\leqslant1/2$ 和 $\theta\leqslant1/2$,于是对充分小的 $\varepsilon_0>0$,(12.2.17)式即

$$\varphi(\alpha\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2}\varphi(\varepsilon),\quad \forall\, 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0, \tag{12.2.18}$$

其中,$\varphi(\varepsilon)=\varepsilon^d n_X(\varepsilon)$,$0<\alpha\leqslant1/2$,该式意味着

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varphi(\varepsilon) = 0. \tag{12.2.19}$$

事实上,取 $j=j(\varepsilon)$使

$$\alpha^{j+1}\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon < \alpha^j\varepsilon_0,$$

显然 $\varepsilon\to0$ 时 $j\to\infty$ 于是由(12.2.18)有

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(\alpha^j\alpha^{-j}\varepsilon) \leqslant 2^{-j}\varphi(\alpha^{-j}\varepsilon) \leqslant 2^{-j}M,$$

其中

$$M = \sup_{\alpha\varepsilon_0\leqslant\xi\leqslant\varepsilon_0}\varphi(\xi) = \sup_{\alpha\varepsilon_0\leqslant\xi\leqslant\varepsilon_0}\xi^d n_X(\xi) \leqslant \varepsilon_0^d n_X(\alpha\varepsilon_0) < \infty.$$

从而(12.2.19)成立.故存在 $\varepsilon_1>0$,使得

$$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon^d n_X(\varepsilon) \leqslant 1,\quad \forall\, 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1.$$

因而

$$\frac{\log n_X(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \leqslant d,\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1,$$

令 $\varepsilon\to0$ 知结论成立. □

对 Lyapunov 指数,有下面的定理.设 $\bar{\omega}_j(p)$, $\bar{\alpha}_j(p)$定义同前,记

$$\bar{\Lambda}_j = \limsup_{p\to\infty}\{\bar{\alpha}_j(p)\}^{1/p}, \quad \bar{\mu}_j = \log\bar{\Lambda}_j, \quad \forall j \geqslant 1.$$

引理 12.2.5 对任一 $j\in\mathbf{N}$,有如下不等式成立

$$\Lambda_j \leqslant \bar{\Lambda}_j \leqslant (\Lambda_1\cdots\Lambda_j)^{1/j},$$

$$\mu_j \leqslant \bar{\mu}_j \leqslant \frac{1}{j}(\mu_1 + \cdots + \mu_j).$$

证明 因为 $\alpha_j(L)$对任一 $L\in\mathscr{L}(H)$是递减的,容易核验

$$\bar{\omega}_j(p) \leqslant \bar{\omega}_{j-1}(p)\bar{\alpha}_j(p), \quad \forall j \geqslant 2, p \in \mathbf{N},$$

$$\bar{\alpha}_j(p) \leqslant \{\bar{\omega}_j(p)\}^{1/j}, \quad \forall j \geqslant 1, p \in \mathbf{N},$$

于是

$$\left(\frac{\bar{\omega}_j(p)}{\bar{\omega}_{j-1}(p)}\right)^{1/p} \leqslant (\bar{\alpha}_j(p))^{1/p} \leqslant ((\bar{\omega}_1(p)\cdot\frac{\bar{\omega}_2(p)}{\bar{\omega}_1(p)}\cdots\frac{\bar{\omega}_j(p)}{\bar{\omega}_{j-1}(p)})^{1/j})^{1/p},$$

令 $p\to\infty$,有结论的第一式成立,再取对数有第二式成立. □

定理 12.2.3 设 f 在其紧不变集 $X\subset H$ 上一致可微且满足条件(12.2.8),如果存在 $n\geqslant 1$ 使

$$\mu_1 + \cdots + \mu_{n+1} < 0, \tag{12.2.20}$$

则

$$\mu_{n+1} < 0, \quad (\mu_1 + \cdots + \mu_n) < |\mu_{n+1}|; \tag{12.2.21}$$

并且

$$\dim_H(X) \leqslant d_0 = n + \frac{(\mu_1 + \cdots + \mu_n)_+}{|\mu_{n+1}|}, \tag{12.2.22}$$

$$\dim_B(X) \leqslant d_1 = (n+1)\left\{1 + \max_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{(\mu_1 + \cdots + \mu_j)_+}{|\mu_1 + \cdots + \mu_{n+1}|}\right\}, \tag{12.2.23}$$

其中$(\mu_1 + \cdots + \mu_n)_+ = \max\{0, (\mu_1 + \cdots + \mu_n)\}$.

证明 首先,由条件(12.2.20)及引理12.2.5的第二式立即得(12.2.21).

其次,证(12.2.22)式.为了引用定理 12.2.1,只需对充分大的 $p\in\mathbf{N}$,核验(12.2.13)对任一 $d>d_0$ 成立即可.事实上,由定义 12.2.2,不难核验

$$\mu_1 + \cdots + \mu_j = \lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\log\bar{\omega}_j(P), \quad \forall j \geqslant 1, \tag{12.2.24}$$

记 $d = n + s$, $0<s<1$,由 $\bar{\omega}_d(p)$的定义可核验

$$\bar{\omega}_d(p) \leqslant (\bar{\omega}_n(P))^{1-s}(\bar{\omega}_{n+1}(p))^s,$$

联合(12.2.24)式,得

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\log\bar{\omega}_d(p)\leqslant\lim_{p\to\infty}\left[\frac{1-s}{p}\log\bar{\omega}_n(p)+\frac{s}{p}\log\bar{\omega}_{n+1}(p)\right]$$
$$\leqslant\mu_1+\cdots+\mu_n+s\mu_{n+1}.$$

当 $d>d_0$, d_0 如(12.2.22),即

$$s>\frac{(\mu_1+\cdots+\mu_n)_+}{|\mu_{n+1}|}$$

时,有

$$\mu_1+\cdots+\mu_n+s\mu_{n+1}<0$$

成立,从而

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\log\bar{\omega}_d(p)<0.$$

对充分大的 $p\in\mathbf{N}$ 和任一 $d>d_0$,有

$$\bar{\omega}_d(p)<1$$

成立.从而,由 d 的任意性知结论(12.2.22)成立.

最后,证(12.2.23)式.记

$$d_1'=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{n+\frac{(\mu_1+\cdots+\mu_j)_+}{|\bar{\mu}_{n+1}|}\right\}$$

由引理 12.2.5, $d_1'\leqslant d_1$,其中 d_1 如(12.2.23).故只需证

$$\dim_B(X)\leqslant d_1'. \tag{12.2.25}$$

事实上,类似于定理 12.2.2 中(12.2.17)式的证明,有

$$(\alpha\varepsilon)^d n_X(\alpha\varepsilon)\leqslant\theta(p)\varepsilon^d n_X(\varepsilon), \tag{12.2.26}$$

其中

$$\alpha=2\sqrt{d+1}\bar{\alpha}_{n+1}(p),$$
$$\theta(p)=2^{2d}(d+1)^{d/2}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{\bar{\omega}_j(p)(\bar{\alpha}_{n+1}(p))^{d-j}\}.$$

由引理 12.2.5 和条件(12.2.20),有 $\bar{\mu}_{n+1}<0$.再由 $\bar{\Lambda}_j$ 和 $\bar{\mu}_j$ 的定义,有

$$\limsup_{p\to\infty}\{\bar{\alpha}_{n+1}(p)\}^{1/p}=\exp(\bar{\mu}_{n+1})<1.$$

于是,对充分大的 p,可要求 $0<\alpha<1/2$.同时,对任一 $d>d_1'$,有

$$\limsup_{p\to\infty}\frac{1}{p}\log\{\bar{\omega}_j(p)(\bar{\alpha}_{n+1}(p))^{d-j}\}$$
$$=\mu_1+\cdots+\mu_j+(d-j)\bar{\mu}_{n+1}$$
$$\leqslant(\mu_1+\cdots+\mu_j)_+-(d-j)|\bar{\mu}_{n+1}|<0,\quad j=1,2,\cdots,n,$$

从而

$$\limsup_{p\to\infty}\frac{1}{p}\log\theta(p)<0.$$

于是,对充分大的p,同样可要求$0<\theta(p)<\frac{1}{2}$.从而(12.2.26)类似于(12.2.18).类似于定理12.2.2的证明,可证$\dim_B(X)\leqslant d$.由于d可任意接近d'_1,而有(12.2.25)成立. □

在(12.2.20)中,设m是使其成立的第一个正整数,则$\mu_1+\cdots+\mu_m\geqslant 0$,从而(12.2.22)中$d_0=m+\frac{\mu_1+\cdots+\mu_m}{|\mu_{m+1}|}$称为$X$的Lyapunov维数.定理12.2.3断言$\dim_H(X)$小于或等于Lyapunov维数.

有关吸引子分形结构的进一步讨论,还可参考文献[145].

§12.3 惯性流形和近似惯性流形

设H是一个Hilbert空间,其内积记为$(\cdot,\cdot)$,范数记为$|\cdot|$。考虑H中以下发展方程确定的无穷维动力系统,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au=R(u), \tag{12.3.1}$$

$$u(0)=u_0. \tag{12.3.2}$$

这里A是一个无界自伴闭的正算子,定义域为$D(A)\subset H$,R是$D(A^\gamma)$到H的非线性C^1映象,其中γ是某个满足$(0\leqslant\gamma<1)$的数,$D(A^\gamma)\subset H$是A^γ的定义域.函数$u=u(t)$是由$\mathbf{R}_+$到$D(A)$的映象.

许多耗散型的微分方程,例如,以下的二维粘性不可压缩流体的Navier-Stokes方程可化为这种形式(参见[142],[147],[156],[160],[162]等).

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\nu\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=f, \tag{12.3.3}$$

$$\operatorname{div} u=0, \tag{12.3.4}$$

$$u(x,0)=u_0. \tag{12.3.5}$$

假定初值问题(12.3.1),(12.3.2)适定,即对每个$u_0\in H$,存在唯一的连续映象$u=u(t)(t<0)$满足上述方程.于是我们定义了H上的连续算子半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$.

$$S(t):u(0)\in H\mapsto H,\quad t\geqslant 0. \tag{12.3.6}$$

定义 12.3.1 给定Hilbert空间H中算子半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$.此半群的惯性流形M是H中一个子集,它满足

(i) M是一个有限维的Lipschitz流形. (12.3.7)

(ii) $S(t)M\subset M$, $\forall t\geqslant 0$. (12.3.8)

(iii) 存在常数$c_1,c_2>0$,使对任何$u_0\in H$,有

$$\operatorname{dist}(S(t)u_0, M) \leqslant c_1 \cdot \exp(-c_2 t) \quad (t \geqslant t_0). \tag{12.3.9}$$

显然，当惯流流形 M 存在时，$S(t)$在 M 上的限制定义了一个有限维算子半群$\{\Sigma(t)\}_{t\geqslant 0}$，

$$\begin{aligned} &\Sigma(t) = S(t)|_M, \\ &\Sigma(t): M \to M. \end{aligned} \tag{12.3.10}$$

由$\Sigma(t)$确定的有限维系统称之为惯性系统.

当系统同时存在惯性流形 M 和吸引子 A 时，显然有 $A \subset M$. 并且 A 和 M 都是有限维的. 但是，吸引子和惯性流形有差别：(1)吸引子可能是很复杂的集合，例如可能是分形集，而惯性流形是(Lipschitz)光滑的，通常还是 C^1 流形；(2)解轨道到吸引子的收敛很慢，可能是 t 的负幂次方或者更慢. 而解轨道到惯性流形的收敛具有指数速度. 事实上，经一个简短的瞬时周期之后，解轨道本质上位于惯性流形 M 之中，大部分的动力学性态都在 M 上发生(参看文献[141]，[142]，[152]，[153]，[158]，[159]).

惯性流形 M 还具有下面定义描述的性质.

定义 12.3.2 (渐近完备性)　对任何 $u_0 \in H$，存在 $\bar{u}_0 \in M$ 和 $\tau > 0$，使得

$$\operatorname{dist}(S(t)u_0, S(t+\tau)\bar{u}_0) \to 0 \quad (t \to +\infty). \tag{12.3.11}$$

由这条性质，惯性流形在不丢失任何渐近信息的情况下降低了维数.

现在回到(12.3.1)，假定 A^{-1}是紧的，则 H 中存在由 A 的特征向量组成的正交规范基$\{w_j\}_{j\in\mathbf{N}}$，

$$Aw_j = \lambda_j, \quad w_j \in D(A), 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots, \lambda_j \to \infty \quad (j \to \infty) \tag{12.3.12}$$

于是，对任何 $u \in H$(或者，对任何 $u \in D(A^\beta)$，$\beta \geqslant 0$)都有收敛的级数展式

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{u}_j w_j. \tag{12.3.13}$$

取定 $N \in \mathbf{N}$，用 P_N 来记H 到子空间 $\operatorname{Span}\{w_1, \cdots, w_N\}$的正交投影，且用 $Q_N = I - P_N$ 来记H 到子空间 $\operatorname{Span}\{w_j \mid j \geqslant N+1\}$的正交投影. 于是，可将每个 $u \in H$ 写成

$$u = y_N + z_N, y_N = P_N u, z_N = Q_N u. \tag{12.3.14}$$

容易明白，方程(12.3.1)等价于系统

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + Ay = PR(y+z), \tag{12.3.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + Az = QR(y+z), \tag{12.3.16}$$

如同上式，当 N 固定且不致引起混淆时，为简单起见我们省去标号 N，即，用 P, Q, y, z 来代替 P_N, Q_N, y_N, z_N.

迄今为止,人们已创立许多方法来构造半群$\{S(t)\}_{t\geq 0}$的惯性流形;但一般而言,对某个 N,人们所构造的惯性流形 M 都是一个由 P_NH 到 Q_NH 的函数的图像.

$$z_N = \Phi(y_N) \qquad \Phi: P_NH \to Q_NH \tag{12.3.17}$$

下面是一个关于惯性流形存在性的一般结果.为了避免关键性内容被技术细节所掩盖,我们按一种不用全部假设的模糊的方式来叙述结论;感兴趣的读者可参看[141],[142],[152],[153]等文献,以了解完整的叙述和证明.

定理 12.3.1 假定条件如本节前面所给.此外,还假定

(i) A 和 R 满足一些技术性条件,

(ii) 对某个 $N\in\mathbf{N}$ 成立 $\lambda_{N+1}\geqslant\kappa_1$,

(iii) 成立 $\lambda_{N+1}-\lambda_N\geqslant\kappa_2(\lambda_{N+1}^{\alpha}+\lambda_N^{\alpha})$,

其中 $\kappa_1,\kappa_2>0$ 和 $\alpha(0\leqslant\alpha<1)$是依赖于 A,R 的常数.

则存在一个 C^1 映象 Φ: $P_NH\to Q_NH$,使得 Φ 的图像 M 是方程(12.3.1),(12.3.2)(或者半群$\{S(t)\}_{t\geq 0}$)的惯性流形.

一般而言,(i)中提到的技术性条件可被许多方程满足,例如,空间维数为2的 Navier-Stokes 方程满足此条件.当 N 充分大时,假设条件(ii)也容易满足,但是假设条件(iii)是比较苛刻的,通常不容易验证,称作谱间隙条件.我们知道,在 Navier-Stokes 方程情形,因为 $\alpha=1/2$,且

$$\lambda_N \sim cN,(N\to\infty)$$

(参见文献[148],[157]).所以不知道(iii)是否满足.当然,人们对某些方程,例如,对 $\alpha=0$(一维或二维)的反应扩散方程,以及某些耗散发展的数学物理方程(如 Kuramoto-Sivashinsky 方程,Cahn-Hilliard 方程,复的 Ginzburg-Landau 方程),验证了谱间隙条件满足,从而得到了惯性流形的存在性结论.

用确定 Φ 的图像的办法来证明惯性流性存在性还有几种常见的方法.

·Perron-Lyapunov 方法 这个方法把确定 Φ 的问题转化为求解某个映象 T 的不动点问题 $T\Phi=\Phi$.这是 Perron 和 Lyapunov 构造中心流形的办法,因此,得到的惯性流形是一个全局的流形.

·Cauchy 方法 这个方法基于积分曲线的构造.在 P_NH 中选取适当大的球形集 Γ 并考虑一族积分曲线 $\Sigma=\bigcup_{t\geq 0}S(t)\Gamma$,可以证明$\Sigma$的闭包是 P_NH 上的图像,$\overline{\Sigma}$就是惯性流形.

·Hadamard 方法 这个方法研究 t 增大时的流形 $S(t)P_NH$;在适当假设下,这些流形成为 P_NH 上的图像,当 $t\to\infty$时,它们收敛,极限就是惯性流形.

·Sacker 方法 这个方法把确定 Φ 的问题转化为无穷维的双曲方程问题,然后通过投影和化简得到.

下面给出一个具有加强粘性的 Navier-Stokes 方程的例子.考虑空间维数为 n 且具有高阶粘性项的 Navier-Stokes 方程(参见文献[159],[160]等).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu(-\Delta)^r u - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f, \tag{12.3.18}$$

$$\nabla\cdot u = 0, \tag{12.3.19}$$

其中 $u=u(x,t)$, $p=p(x,t)$定义于 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+$ 上,且分别取值于 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}$ 中, $u=(u_1,\cdots,u_n)$; $r\in\mathbf{N}$, μ, ν 为正数.容易明白,若 $\mu=0$ 则(12.3.18),(12.3.19)就是通常的不可压缩 Navier-Stokes 方程.

在空间周期情形,令 u 和 p 在每个方向 $x_1,\cdots,x_n$ 上有相同周期 $L>0$,即, $u(x+Le_i,t)=u(x,t)$, $\forall x\in\mathbf{R}^n$, $\forall t>0$.此外还假设在 $Q=(0,L)^n$ 上积分

$$\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x = 0.$$

现在的情形,对一般的 $\mathbf{H}_p^m(Q)=\{H_p^m(Q)\}^n$,作空间

$$\begin{aligned} H &= \{u\in\mathbf{H}_p^0(Q),\text{且在 }\mathbf{R}^n\text{ 中 div } u=0\},\\ V &= \{u\in\mathbf{H}_p^1(Q),\text{且在 }\mathbf{R}^n\text{ 中 div } u=0\},\end{aligned} \tag{12.3.20}$$

令

$$Au = \mu(-\Delta)^r u - \nu\Delta u, \tag{12.3.21}$$

则定义域 $D(A)=V\cap\mathbf{H}_p^{2r}(Q)$(参见文献[159],[160]).记

$$R(u) = \prod(f-(u\cdot\nabla)u), \tag{12.3.22}$$

其中$\prod$是 $\mathbf{L}^2(Q)$到 H 的正交投影,由此可知方程(12.3.18),(12.3.19)完全具有(12.3.1)的形式.

对任意的 $u,v,w\in\mathbf{L}^1(Q)$,定义三线性形式

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^n\int_\Omega u_iD_iv_jw_j\mathrm{d}x. \tag{12.3.23}$$

由熟悉的结论可知,假设 $m_1=m_2+1>n/4$,则三线性形成 b 在 $\mathbf{H}^{m_1}(Q)\times\mathbf{H}^{m_2+1}(Q)\times\mathbf{L}^2(Q)$上是连续的.特别当 $m_1=m_2+1=r$ 时,三线性形式 b 在 $D(A^{1/2})\times D(A^{1/2})\times H$ 上连续.其中, A 如(12.3.21)所示且假定

$$r > \frac{n}{4}-\frac{1}{2}. \tag{12.3.24}$$

按照文献[159]的办法,周期问题(12.3.18),(12.3.19)可定义一个适当的初值问题.并且,方程满足定理 12.3.1 的假设和条件(i)(ii).

至于定理 12.3.1 的条件(iii).由文献[148,157]的结论知, $\lambda_N\sim cN^{2r/n}$ $(N\to\infty)$,其中 c 是一个适当的常数.若取定 $\lambda_N=cN^{2r/n}$,则在 $\alpha=1/2$ 时,

$$\lambda_{N+1}-\lambda_N \sim c'N^{(2r/n)-1},$$

$$\lambda_{N+1}^{1/2} - \lambda_N^{1/2} \sim c'' N^{r/n}.$$

于是,若有

$$r > n. \tag{12.3.25}$$

则当 N 足够大时,谱间隙条件被满足.

推论 12.3.1 在假定(12.3.25)之下,具有周期边界条件的方程(12.3.18),(12.3.19)存在惯性流形.

众所周知,二维 Navier-Stokes 方程(12.3.3)不能应用定理 12.3.1. 因此,以下介绍关于此方程的惯性系统存在性的推导[161].

引入函数

$$\zeta = \text{curl } u = D_1 u_2 - D_2 u_1. \tag{12.3.26}$$

取(12.3.3)的旋度,得到旋度方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \nu \Delta \zeta + \text{div}(\zeta u) = F = \text{curl } f. \tag{12.3.27}$$

假设 ζ 也具空间周期性,即,在每个时刻 t,有 $\zeta(\cdot, t) \in H_p^1(Q)^2$. 显然由 ζ 我们可以再次得到 u

$$\begin{aligned} u &= \nabla^{\perp} \psi = (D_2 \psi_1 - D_1 \psi), \\ -\Delta \psi &= \zeta, \psi \in H_p^1(Q). \end{aligned} \tag{12.3.28}$$

其中 ψ 是流函数. 容易看出,(12.3.27),(12.3.28)等价于空间周期的二维 Navier-Stokes 方程.

通过 Kwak 变换[154]而令

$$\tilde{v} = \text{grad } \zeta, \quad \tilde{w} = \zeta u,$$
$$J(\zeta) = (\zeta, \tilde{v}, \tilde{w}).$$

直接计算,人们可以检验 $J(\zeta)$是以下系统的解($\varphi' = \mathrm{d}\varphi / \mathrm{d}t$):

$$\begin{gathered} \zeta' - \nu \Delta \zeta + \text{div} \tilde{w} = F, \\ \tilde{v}' - \nu \Delta \tilde{v} + \text{grad}(\text{div} \tilde{w}) = \text{grad} F, \\ \tilde{w}' - \nu \Delta \tilde{w} + 2\nu \tilde{v} \cdot \nabla u + (\tilde{v} \cdot u) u + \zeta \text{curl}[\Delta^{-1}(\tilde{v} \cdot u)] = Fu + \zeta f. \end{gathered} \tag{12.3.29}$$

这里 Δ^{-1}是由 $\dot{L}^2(Q)$到 $\dot{H}_p^2(Q)$的 Laplace 算子的逆;$\tilde{v} \cdot \nabla u$ 表示

$$\sum_{i=1}^{2} \tilde{v}_i D_i u = \sum_{i=1}^{2} (D_i \zeta)(D_i u).$$

寻找空间周期函数 ζ, v, w 使之满足以下方程组是重要的一步

$$\begin{aligned} &\zeta' - \nu \Delta \zeta + \text{div} w = F, \\ &v' - \nu \Delta v + \text{grad}(\text{div } w) = \text{grad } F, \\ &w' - \nu \Delta w + 2\nu v \cdot \nabla u + (v \cdot u) u + \zeta \text{ curl } [\Delta^{-1}(v \cdot u)] \\ &\quad - Fu - \zeta f + r\tilde{\nu}[1 + \tilde{\nu}^{-4} |\zeta|_{1/2}^4](w - \tilde{w}) = 0. \end{aligned} \tag{12.3.30}$$

这里 $\tilde{\nu}=\nu/L^2$. 映象 $u,\tilde{v},\tilde{w}$ 由(12.3.28)和(12.3.29)定义, v 和 w 与 ζ 无关;且充分大的正数 r 待定. 可以看出,若用 $\tilde{v}$ 和 $\tilde{w}$ 替换 v 和 w, 则(12.3.30)和(12.3.29)相同. 通常我们将(12.3.30)称为嵌入系统.

为简单起见,记 $U=(\zeta,v,w)$. 这样(12.3.30)中的线性部分便定义了一个非自伴的算子 $\mathbf{A}:U\mapsto\mathbf{A}U$,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-\nu\Delta & 0 & \mathrm{div}\\ 0 & -\nu\Delta & \mathrm{grad\ div}\\ 0 & 0 & -\nu\Delta\end{pmatrix}. \tag{12.3.31}$$

将此看作由 $\mathbf{W}_2$ 到 $\mathbf{W}_0$ 的无界算子,其中 $\mathbf{W}_s=\dot{H}_p^s(Q)\times\dot{H}_p^s(Q)^2\times\dot{H}_p^s(Q)$, $(s\geqslant 0)$. 按此记号可将(12.3.30)写作(12.3.1)那样的形式

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+\mathbf{A}U=\mathbf{R}(U). \tag{12.3.32}$$

建立(12.3.30)的解的存在唯一性定理是容易的,此处从略(例如,可参见文献[160]). 下面将在假定(12.3.30)的解 U 充分正则的条件下建立解的先验估计;这分两步完成.

i) 第一步,要证明随 $t\to\infty$, (12.3.30)收敛于(12.3.29);这通过证明 $t\to\infty$ 时 $v(t)-\tilde{v}(t)$ 和 $w(t)-\tilde{w}(t)$ 都收敛于 0 来过渡. 注意,如果 ζ,v,w 是(12.3.30)的解,则

$$\tilde{v}'-\nu\Delta\tilde{v}+\mathrm{grad}(\mathrm{div}\ w)=\mathrm{grad}\ F. \tag{12.3.33}$$

由(12.3.30)的第二方程减去此式可得

$$(v-\tilde{v})'-\nu\Delta(v-\tilde{v})=0.$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v-\tilde{v}|^2+2\nu\|v-\tilde{v}\|^2=0. \tag{12.3.34}$$

如果 $\mu_1=4\pi^2/L^2$ 是算子 $-\Delta$ 在 $\dot{H}_p^s(Q)^2$ 中的第一个特征值,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|(v-\tilde{v})|^2+2\nu\mu_1|(v-\tilde{v})|^2\leqslant 0.$$

$$|(v-\tilde{v})(t)|^2\leqslant|(v-\tilde{v})(0)|^2\exp(-2\nu\mu_1 t).$$

$$|(v-\tilde{v})(t)|\to 0\quad(t\to\infty). \tag{12.3.35}$$

关于 $w-\tilde{w}$ 的证明要复杂一些. 至于(12.3.29)第三方程的推导,通过运用 $\mathrm{div}\tilde{w}=\tilde{v}\cdot u$ 可得

$$\tilde{w}'-\nu\Delta\tilde{w}+2\nu\tilde{v}\cdot\nabla u+(\mathrm{div}\ w)u+\zeta\ \mathrm{curl}[\Delta^{-1}(\mathrm{div}\ w)]=Fu+\zeta f. \tag{12.3.36}$$

由(12.3.30)第三方程减去此式可得

$$(w-\tilde{w})'-\nu\Delta(w-\tilde{w})+2\nu(v-\tilde{v})\cdot\nabla u+(v\cdot u-\mathrm{div}\ w)u$$

$$+\zeta\text{curl}[\Delta^{-1}(v\cdot u-\text{div }w)]+r\tilde{\nu}[1+\tilde{\nu}^{-4}|\zeta|_{1/2}^4](w-\tilde{w})=0.$$
(12.3.37)

于 $L^2(Q)$ 中在上式两端取与 $w-\tilde{w}$ 的内积得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w-\tilde{w}|^2+\nu\|w-\tilde{w}\|^2+r\tilde{\nu}[1+\tilde{\nu}^{-4}|\zeta|_{1/2}^4]|w-\tilde{w}|^2$$
$$=-2\nu((v-\tilde{v})\cdot\nabla u,w-\tilde{w})-((v\cdot u-\text{div }w)u,w-\tilde{w})$$
$$-(\zeta\text{ curl}[\Delta^{-1}(v\cdot u-\text{div }w)],w-\tilde{w}).\tag{12.3.38}$$

类似[161]便有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w-\tilde{w}|^2+\nu\|w-\tilde{w}\|^2+(2r-c'_1)\tilde{\nu}[1+\tilde{\nu}^{-4}|\zeta|_{1/2}^4]|w-\tilde{w}|^2$$
$$\leqslant\nu^3\|w-\tilde{w}\|^2,\tag{12.3.39}$$

其中 c' 是与 r 无关的一个常数. 现在选取 $r=c_1'$, 然后用 ν^2 除(12.3.39)并加到(12.3.34)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{|v-\tilde{v}|^2+\nu^{-2}|w-\tilde{w}|^2\}+\nu\{\|v-\tilde{v}\|^2+\nu^{-2}\|w-\tilde{w}\|^2\}$$
$$+\frac{r}{\nu L^2}[1+\tilde{\nu}|\zeta|_{1/2}^4]|w-\tilde{w}|^2\leqslant 0.\tag{12.3.40}$$

特别地有,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{|v-\tilde{v}|^2+\nu^{-2}|w-\tilde{w}|^2\}+\nu\mu_1\{|v-\tilde{v}|^2+\nu^{-2}|w-\tilde{w}|^2\}\leqslant 0,$$
$$\{|(v-\tilde{v})(t)|^2+\nu^{-2}|(w-\tilde{w})(t)|^2\}$$
$$\leqslant\{|(v-\tilde{v})(0)|^2+\nu^{-2}|(w-\tilde{w})(0)|^2\}\exp(-2\nu\mu_1 t),$$

这就证明了

$$|(v-\tilde{v})(t)|^2+\nu^{-2}|(w-\tilde{w})(t)|^2\to 0(t\to\infty).\tag{12.3.41}$$

这意味着当 $t\to\infty$ 时, 嵌入系统收敛于原来方程组(12.3.27)或(12.3.29).

ii) 第二步, 我们进一步推导先验估计.

关于 $\zeta,\tilde{v}=\text{grad}\zeta,\tilde{w}=\zeta u$ 的估计推导如下. 于 $L^2(Q)$ 中取(12.3.30)的第一方程与 ζ 的内积得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\zeta|^2+\nu\|\zeta\|^2&=(F,\zeta)-(\text{div }w,\zeta)\\&=(F,\zeta)-(\text{div}(w-\tilde{w}),\zeta)\\&=(\text{curl }f,\zeta)+(w-\tilde{w},\text{grad}\zeta)\\&=(f,\nabla^{\perp}\zeta)+(w-\tilde{w},\text{grad}\zeta)\\&\leqslant\frac{\nu}{4}|\nabla^{\perp}\zeta|^2+\frac{1}{\nu}|f|^2+\frac{\nu}{4}|\nabla\zeta|^2+\frac{1}{\nu}|w-\tilde{w}|^2\\&\leqslant\frac{\nu}{2}\|\zeta\|^2+\frac{1}{\nu}|f|^2+\frac{1}{\nu}|w-\tilde{w}|^2,\end{aligned}$$

其中$(\mathrm{div}\overline{w}, \zeta) = 0$. 所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\zeta|^2 + \nu\|\zeta\|^2 \leqslant \frac{2}{\nu}|f|^2 + \frac{2}{\nu}|w - \widetilde{w}|^2 \leqslant \frac{2}{\nu}|f|^2 + \frac{2}{\nu\mu_1}\|w - \widetilde{w}\|^2. \tag{12.3.42}$$

用 $\mu_1/4(\mu_1 = 4\pi^2/L^2)$乘以上式并加到(12.3.40)上:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\mu_1}{4}|\zeta|^2 + |v - \widetilde{v}|^2 + \nu^{-2}|w - \widetilde{w}|^2\right\}$$
$$+ \frac{\nu}{2}\left\{\frac{\mu_1}{4}\|\zeta\|^2 + \|v - \widetilde{v}\|^2 + \nu^{-2}\|w - \widetilde{w}\|^2\right\}$$
$$+ \frac{r}{\nu L^2}\left[1 + \frac{\nu}{L^2}|\zeta|_{1/2}^4\right]|w - \widetilde{w}|^2 \leqslant \frac{\mu_1}{2\nu}|f|^2. \tag{12.3.43}$$

由此,特别可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\mu_1}{4}|\zeta|^2 + |v - \widetilde{v}|^2 + \nu^{-2}|w - \widetilde{w}|^2\right\}$$
$$+ \frac{\nu\mu_1}{2}\left\{\frac{\mu_1}{4}|\zeta|^2 + |v - \widetilde{v}|^2 + \nu^{-2}|w - \widetilde{w}|^2\right\} \leqslant \frac{\mu_1}{2\nu}|f|^2,$$

于是

$$|\zeta(t)| \leqslant K_1 \quad \forall\, t \geqslant 0, \tag{12.3.44}$$

其中 K_1 依赖于 $U_0, |f|, \nu, L$.

因为对任何 $s \geqslant 0$, $\mathbf{W}_s = \dot{H}_p^s(Q) \times \dot{H}_p^s(Q)^2 \times \dot{H}_p^s(Q)$且 $D(\mathbf{A}) = \mathbf{W}_2$. 于是,基于这些估计我们得到下列定理[160,161].

定理 12.3.2　设 $f \in \dot{\mathbf{H}}_p^1(Q)^2 = \dot{H}_p^1(Q)^2$, $U_0 \in D(\mathbf{A})$, 则存在(12.3.30)的满足 $U(0) = U_0$ 的唯一解 $U = U(t)$, 且

$$U \in C(\mathbf{R}_+; \mathbf{W}_1),$$
$$U \in L^2(0, T; \mathbf{W}_3), \quad U' \in L^2(0, T; \mathbf{W}_1), \quad \forall\, T > 0.$$

进一步,

(i) 如果 $U_0 = J(\zeta_0)$, 则 $U(t) = J(\zeta(t))$, $\quad \forall\, t \geqslant 0$.

(ii) 如果 $U_0 \neq J(\zeta_0)$, 则

$$|U(t) - J(\zeta(t))| \to 0 (t \to \infty).$$

现在的情形,在 $D(\mathbf{A})$中,嵌入系统(12.3.30)是反映扩散型的方程组,算子 $\mathbf{A}$ 非自伴,其特征值是形如$(4\pi^2\nu/L^2)(k_1^2 + k_2^2)$, $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$ 的数,特征函数是正弦函数和余弦函数的适当组合. 我们知道应用定理 12.3.1 的关键一点是检验谱间隙条件,即定理 12.3.1 中的条件(iii). 而方程的非线性项是 U 的连续映象;故而谱间隙条件(iii)中 $\alpha = 0$. 于是,整个谱间隙条件现在转化为数论中一个熟知的问题[159,160]: 两个呈平方和的整数之间存在任意大的间隙. 由

此便知，嵌入方程存在惯性流形和惯性系统．根据定理 12.3.2 的(i)，嵌入系统的惯性形式也是二维 Navier-Stokes 方程的惯性形式．记 $U = Y + Z$ 且写 $Z = \Phi(Y)$ 为嵌入系统的惯性流形方程．设 P 是对应的算子 $P = P_N$；则由(12.3.15)～(12.3.17)和(12.3.32)便得到了惯性系统

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} + \mathbf{A}Y = P\mathbf{R}(Y + \Phi(Y)). \tag{12.3.45}$$

推论 12.3.2 存在有限维微分系统(12.3.45)，它和空间周期的二维 Navier-Stokes 方程具有完全相同的动力性态．

所谓相同的动力性态，即具有相同的平衡点，相同的时间周期轨道或时间拟周期轨道，相同的吸引子等．

因为大多数微分方程目前尚无法证明惯性流形的存在性，以及数值逼近的需要，人们考虑了近似惯性流形(见文献[149]，[150]，[151]，[162]等)．

近似惯性流形最初的想法是对(12.3.1)进行扰动，得到添加了人工粘性项 $\varepsilon>0$ 且含有 A 的幂 $A^s(s>1)$ 的修正方程

$$\frac{\mathrm{d}u_\varepsilon}{\mathrm{d}t} + \varepsilon A^s u_\varepsilon + Au_\varepsilon = R(u_\varepsilon).$$

对此修正方程而言，算子 A^s 的特征值为 $\{\lambda_j^s\}_{j\in N}$．故而可望对某个适当的 $s\geqslant s_0>1$，当 N 足够大时 $\{\lambda_j^s\}_{j\in N}$ 满足谱间隙条件，从而得到修正方程的惯性流形 M_ε，因为 ε 很小，所以将 M_ε 作为(12.3.1)的一个近似惯性流形．

这样得到的近似惯性流形颇有缺陷：(1)当 ε 很小时，情况会恶化，此时 M_ε 的维数将变得非常高，从而不实用；(2)随 $\varepsilon\to 0$，M_ε 是否有极限不得而知，很可能惯性流形消失了．

一个更自然的近似惯性流形概念是用一个光滑的有限维流形去逼近全局吸引子．它的基本特征是存在某个时刻 t_1，在时刻 $t\geqslant t_1$ 后的所有的解轨道都迅速进入该流形的一层很薄的邻域之中．

定义 12.3.3 有限维光滑流形 $\widetilde{M}$ 称为系统(12.3.1)在空间 H 中阶为 η 的近似惯性流形，如果存在常数 $c>0$ 和时刻 $t_*>0$，使得 $t\geqslant t_*$ 时，所有轨道 $u(t)$ 都满足

$$\mathrm{dist}(u(t), \widetilde{M}) \leqslant c\eta. \tag{12.3.46}$$

下面讨论二维 Navier-Stokes 方程(12.3.3)-(12.3.5)的近似惯性流形及其构造方法．众所周知，方程(12.3.3)，(12.3.4)特别地可以写成下式：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \nu Au + B(u) = f. \tag{12.3.47}$$

这是(12.3.1)中取 A 为 νA，$R(u)$ 为 $f - B(u)$ 的特例，其中 $B(u) = B(u,u)$．

取定正整数 m，投影算子 P_m, Q_m 意义如前．将(12.3.47)，(12.3.2)的解分解为 $u(t)=p_m(t)+q_m(t)$，$p_m=P_m u$，$q_m=Q_m u$．此时，如(12.3.15)和(12.3.16)，在不致引起混淆时省略记号 m 有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+\nu A_p+PB(p+q)=Pf,\quad p(0)=p^0=Pu_0, \tag{12.3.48}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\nu A_q+QB(p+q)=Qf,\quad q(0)=q^0=Qu_0, \tag{12.3.49}$$

关于此分解有以下一个基本结论．

定理 12.3.3　设 m 足够大，使得

$$\Lambda=\lambda_{m+1}\geqslant c_1 M_1^2/\nu$$

其中 c_1(包括以下的 c_i)是正常数，$M_1=\sup\limits_{s\geqslant t_0}|A^{1/2}u(s)|$，则存在时刻 $t_1>0$，当 $t\geqslant t_1$ 时，(12.3.47)，(12.3.2)的所有解轨道 $u(t)=p(t)+q(t)$满足

$$|q(t)|^2\leqslant|q(t_0)|^2e^{-\nu\Lambda(t-t_0)}+\frac{c_2}{\nu^2\Lambda^2}(|Qf|^2+M_1^4)L, \tag{12.3.50}$$

且

$$\begin{aligned}&|q(t)|\leqslant k_0L^{1/2}\delta,\quad \|q(t)\|\leqslant k_1L^{1/2}\delta^{1/2},\\ &|Aq(t)|\leqslant k_2L^{1/2}\quad |q'(t)|\leqslant k_3L^{1/2}\delta.\end{aligned} \tag{12.3.51}$$

其中常数 $k_i(i=0,1,2,3)$只依赖于 ν_1，$|f|$，λ_1 等，且

$$\delta=\frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}},\qquad L=1+\log\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_1}.$$

按方程的力学意义，$p(t)$对应于流 $u(t)$的大涡大量，$q(t)$对应于流 $u(t)$的小涡分量．定理结论说明，当 m 很大时，无论是按 H 还是 V 中范数估计，小涡份量皆很小，而且导数 $q'(t)$也很小．

在逼近问题中需要考虑构造一族$\{q_j(t)\}$，$j\in\mathbf{N}$ 来近似小涡分量 $q(t)$．

定义每个 $q_j\in QH$ 为

$$q_j=\theta_0+\theta_2+\cdots+\theta_j,\quad j\geqslant 0,$$

其中 $\theta_i=\theta_i(t)(i=0,1,\cdots,j)$依次由下面方程组定义($j\geqslant 2$)

$$\begin{aligned}&\nu A\theta_0+QB(p)=Qf,\\ &\nu A\theta_1+QB(p,\theta_0)+QB(\theta_0,p)=0,\\ &\theta'_{j-2}+\nu A\theta_j+QB(p,\theta_{j-1})+QB(\theta_{j-1},p)+QB(q_{j-3},\theta_{j-2})\\ &\quad+QB(\theta_{j-2},q_{j-3})+QB(\theta_{j-2},\theta_{j-2})=0.\end{aligned} \tag{12.3.52}$$

由此求得的 q_j,θ_j 有以下估计式．

定理 12.3.4　存在时刻 $t_2(\geqslant t_1)$，使当 $t\geqslant t_2$ 时成立

$$|\theta_j(t)| \leqslant \kappa_j \delta^{1+j/2} L^{(1/2)+(j/2)},\ \|\theta_j(t)\| \leqslant \kappa_j \delta^{(1/2)+(j/2)} L^{(1/2)+(j/2)},$$
$$|A\theta_j(t)| \leqslant \kappa_j \delta^{j/2} L^{(1/2)+(j/2)},\ \|\theta_j'(t)\| \leqslant \kappa_j \delta^{j/2} L^{(1/2)+(j/2)} \tag{12.3.53}$$

和

$$|q_j(t)| \leqslant \kappa_j L^{1/2}\delta, \quad \|q_j(t)\| \leqslant \kappa_j L^{1/2}\delta^{1/2},$$
$$|Aq_j(t)| \leqslant \kappa_j L^{1/2}, \quad |q_j'(t)| \leqslant \kappa_j L^{1/2}\delta, \tag{12.3.54}$$

其中常数 $\kappa_j = \kappa_j(|f|, \nu, \lambda_1)$，且与 m 无关。

相应于解轨道 $u(t) = p(t) + q(t)$ 称 $u_j(t) = p(t) + q_j(t)$ 为诱导轨道，解轨道和诱导轨道之间的误差记为

$$\varepsilon_j(t) \equiv u_j(t) - u(t) = q_j(t) - q(t).$$

它们显然满足方程

$$\begin{aligned}
&\nu A\varepsilon_0 - QB(p,q) - QB(q,p) = QB(q) + q',\\
&\nu A\varepsilon_1 + QB(p,\varepsilon_0) + QB(\varepsilon_0,p) = QB(q) + q',\\
&\nu A\varepsilon_j + QB(p,\varepsilon_{j-1}) + QB(\varepsilon_{j-1},p)\\
&\qquad = QB(q) - QB(q_{j-2}) - \varepsilon'_{j-2} \quad (j \geqslant 2),
\end{aligned} \tag{12.3.55}$$

这些误差的估计式包含在以下定理中.

定理 12.3.5 设 m 满足 $\lambda_{m+1} \geqslant c_1 M_1^2/\nu^2$，则存在 $t_3 \geqslant t_2$，使当 $t \geqslant t_3$ 时成立

$$|\varepsilon_j(t)| \leqslant \bar{\kappa}_j L^{1+j/2} \delta^{(3/2)+(j/2)}, \quad \|\varepsilon_j(t)\| \leqslant \bar{\kappa}_j L^{1+j/2}\delta^{1+j/2},$$
$$|A\varepsilon_j(t)| \leqslant \bar{\kappa}_j L^{1+j/2}\delta^{(1/2)+(j/2)}, \quad |\varepsilon_j'(t)| \leqslant \bar{\kappa}_j L^{1+j/2}\delta^{(3/2)+(j/2)}, \tag{12.3.56}$$

其中常数 $\bar{\kappa}_j = \bar{\kappa}_j(|f|, \nu, \lambda_1)$ 且与 m 无关.

至此易知，定理 12.3.3 表明了线性流形 $M_{-1} = PH$ 是二维 Navier-Stokes 方程的平凡的近似惯性流形. 经过时刻 t_1 后，每条轨道都进入 H 中以 $L^{1/2}\delta$ 为阶的 M_{-1} 的邻域之中(或者，V 中以 $L^{1/2}\delta^{1/2}$ 为阶的邻域之中). 系统的全局吸引子 A 也在此邻域中.(见图 12.3.1)

考虑非平凡的近似惯性流形需要定理 12.3.5 的结论. 因为当 $t \geqslant t_3$ 时，随着 j 的增高，诱导轨道 $u_j(t) = p(t) + q_j(t)$ 可按任意高的精度逼近 $u(t)$. 事实上，由 $q_j = q_j(t)$ 的定义式可知满足方程

$$\begin{aligned}
&\nu Aq_0 + QB(p) = Qf,\\
&\nu Aq_1 + QB(p,q_0) + QB(q_0,p) + QB(p) = Qf,\\
&q'_{j-2} + \nu Aq_j + QB(p) + QB(p,q_{j-1})\\
&\qquad + QB(q_{j-1},p) + QB(q_{j-2}) = Qf.
\end{aligned} \tag{12.3.57}$$

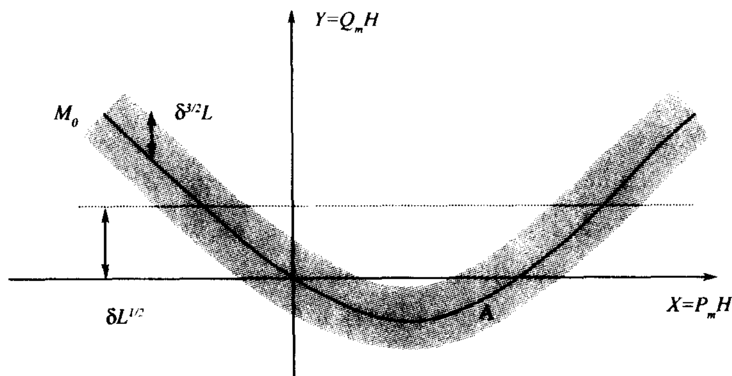


图 12.3.1　平凡近似惯性流形 P_mH 和非平凡近似惯性流形 M_0

因此,0 阶诱导轨道 $p(t)+q_0(t)$中的 $q_0(t)$是以下映象 Φ_0 中的一个值;

$$\Phi_0: PH \to QH,$$

$$\Phi_0(p) = (\nu A)^{-1}(Qf - QB(p)).$$

记 Φ_0 的图像为 M_0,则 $p+q_0 \in M_0$,且 $\mathrm{dist}(u(t), M_0) \leqslant |\varepsilon_0(t)| \leqslant \bar{\kappa}_0 L\delta^{3/2}$,而在 V 中,$\mathrm{dist}(u(t), M_0) \leqslant \|\varepsilon_0(t)\| \leqslant \bar{\kappa}_0 L\delta$.显然 M_0 是一个非平凡的近似惯性流形,$u(t)$在 M_0 的邻域中,该邻域的宽度比 M_{-1}的邻域的宽度更窄(见图 12.3.1).

同理可得近似惯性流形 M_1,它是以下映象 Φ_1 的图像

$$\Phi_1: PH \to QH,$$

$$\Phi_1(p) = (\nu A)^{-1}(Qf - QB(p, \Phi_0(p)) - QB(\Phi_0(p), p) - QB(p)).$$

且有 $p+q_1 \in M_1$ 及 $\mathrm{dist}(u(t), M_1) \leqslant \bar{\kappa}_1 L^{3/2}\delta^2$(在 V 中是$\leqslant \bar{\kappa}_1 L^{3/2}\delta^{3/2}$).此时的邻域宽度又更窄一些.

继续可得 Φ_2 的图像 M_2,

$$\Phi_2(p) = (\nu A)^{-1}Q\{f - B(p) - B(p, \Phi_1(p)) - B(\Phi_1(p), p) - B(\Phi_0(p)) - D\Phi_0(p) \cdot \Psi(p, \Phi_0(p))\}.$$

其中 $D\Phi_0$ 是 Φ_0 的导算子,记号 $\Psi(x,y) = -\nu Ax - PB(x+y) + Pf$.

关于近似惯性流形,尤其是结合近似惯性流形的非线性 Galerkin 数值方法还有不少研究,例如见文献[144, 155].扩充到其他形式的方程讨论近似惯性流形和非线性 Galerkin 数值方法,可见文献[163, 164].

参 考 文 献

[1] V. I. Arnold, Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, Springer Verlag New York Inc. 1983

[2] 张芷芬,丁同仁,黄文灶,董镇喜,微分方程定性理论,北京,科学出版社,1985

[3] 张锦炎,常微分方程几何理论与分支问题,北京,北京大学出版社,1987

[4] G. D. Birkhoff, Dynamical Systems, A. M. S. Publications. Providence.

[5] 孙希文,数理逻辑引论,哈尔滨,哈尔滨工业大学出版社,1991

[6] 陆汝钤,计算机语言的形式语义,北京,科学出版社,1992

[7] 卢开澄,计算机密码学——计算机网络中的数据保密与安全,北京,清华大学出版社,1998 年

[8] 陈绥阳,褚蕾蕾,模型空间的拓扑结构与单调推理算子不动点的存在性,兰州大学学报(自然科学版),1996,32(4)28~33

[9] 吴东兴,点集拓扑学基础,北京,科学出版社,1981

[10] 夏道行,吴卓人,严绍宗,舒五昌,实变函数论与泛函分析,下册,北京,人民教育出版社,1979

[11] P. Collet, J. P. Eckmann, Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems, Progress on Physics, Vol. 1, Birkhauser, Boston, 1980

[12] R. M. May, Simple Models With Very Complicated Dynamics, Nature, 261, 459~467

[13] 王明亮,非线性发展方程与弧立子,兰州,兰州大学出版社,1990

[14] 郭柏灵,非线性演化方程,上海,上海科技教育出版社,1995

[15] J. S. Russell, "Report on Waves", Report of the 14th Meeting of British Association for the Advancement of Science, 1844, John Murray, London, 311~390

[16] D. J. Korteweg and G. de Vries, On the change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long stationary Waves, Phil . Mag, 1895 (39), 422~443

[17] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, Phys. Rev. Leff. 1965(15), 240~243

[18] 刘式达,刘式适,弧波与湍流,上海,上海科技教育出版社,1994

[19] B. B. Немыцкий, B. B. Стеланов 微分方程定性理论,王柔怀,童勤谟译,科学出版社,1959

[20] W. H. Gottschalk, G. A. Hedlund, Topological Dynamics, AMS. Colloquium Publ. 36, Providence, 1955

[21] A. N. Sarkovskii, Coexistence of cycle of a continuous map of a line into itself Ukr. Mat. Z. . 16(1964)pp61~71

[22] P. Stefan, Atheorem of Surkovskii on the existance of periodic orbits of continuous endo-

morphisms of the real. line. comm. Math. Phys., 54(1977)pp237~248

[23] T. Y. Li and J. A. Yorke, Periodic three implies chaos, Amer. Math. Monthly, 82 (1795), 985~992

[24] P. Collet, J. P. Eckmann, Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems, Birkhäuser, Boston, 1980

[25] W. de Melo, Lectures on One-Dimensional Dynamics, IMPA, CNPq, 1990

[26] 张景中,熊金城,函数迭代与一维动力系统,四川教育出版社,1992

[27] L. S. Block, W. A. Coppel, Dynamics in One Dimension, Lecture Notes in Math , 1513, Springer-verlag, New York, 1992

[28] R. L. Devaney, An Introduction to Chaos Dynamical Systems (Second Edition), Addison -Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City, 1989

[29] L. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz and L. S. Young, Periodic poiuts and topological entopy of one dimensional maps, Lecture Notes in Math, 819, Springer-Verlag, 1980

[30] 江泽涵,不动点类理论,科学出版社,1979

[31] E. Spanier, Algebraic topology, MeGraw-Hill, New York, 1966

[32] A. Denjoy, Sur les courbes définies par les éguations differentielles à la surface du tore, J. Math Pures et Appl, 11(1932), 333~375

[33] J. Hocking and G. Young, Topology, Addison-Wesley, 1961, p97

[34] 夏道行,吴卓人,严绍宗,舒亚昌,实变函数论与泛函分析,上册,北京,人民教育出版社,1978

[35] P. Walters, An Introduction to Ergodic Theory, Splinger-Verlag, New York, 1982

[36] R. Mañé, Ergodic Theory and Differentiable Dynamics, Springer-Verlag, New York, 1987

[37] R. L. Adler, A. G. Konheim and M. H. McAndrow, Topological Entropy, Tran. Amer. Math , Sec., 114(1965), 309~319

[38] R. Bowen, Topological Entropy and Axiom A, Global Analysis, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 14, 23~41

[39] 熊金城,关于拓扑熵的一点注记,《科学通报》33:20(1988), 1534~1536

[40] M. Eisenberg, Topology, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1974

[41] G. E. Révész, Introduction to Formal Languages, McGraw-Hill Book Company, New York, 1983

[42] M. Morse, G. A. Hedlund, Symbolic Dynamics, Am. J. Math., 60(1938)815

[43] M. Morse, G. A. Hedlund, Symbolic Dynamics II, Am. J. Math., 62(1940)

[44] 郑伟谋,郝柏林,实用符号动力学,上海科技出版社,1994

[45] 谢惠民,复杂性与动力系统,上海科技出版社,1995

[46] 周作领,符号动力系统,上海科技教育出版社,1997

[47] N. Bourbaki, Topologic generale, 1953

[48] 张筑生,自映射的转移不变集,《数学学报》,27:4(1984)564~526

[49] R. A. Horn and C. R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge 1985

[50] F. J. Hahn and Y. Katznelson, On the Entropy of Uniguely Ergodic Transformations. Trans. Amer. Math. Soc., 126(1967), 335～360

[51] S. Smale, Differentiable Dynamical Systems, Bull. Amer. Math. Soc., 73(1967), 747～781

[52] 江泽涵,拓扑学引论,上海科学技术出版社,1977, p23

[53] B. B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco, 1982

[54] M. F. Barnsley, Fractals Everywhere, Academic Press Orlando. FL. 1988

[55] K. J. Falconer, Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons, 1990

[56] 曾文曲,王向阳,刘丹,王福龙,分形理论与分形的计算机模拟,沈阳,东北大学出版社,1993

[57] 金以文,鲁世杰,分形几何原理及其应用,杭州:浙江大学出版社,1998

[58] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag, 1978, 吴元恺,孙顺华,唐志远,黄发伦译,北京:人民教育出版社,1980, p72

[59] C. A. Rogers, Hausdorff Measures, Comb. Univ. Press, 1970

[60] 朱德明,韩茂安,光滑动力系统,上海,华东师范大学出版社,1993

[61] 钱敏平,随机过程引论,北京,北京大学出版社,1990

[62] K. Petersen, Ergodic Theory, Cambridge Univ. Press, 1983

[63] Pei-Dong Liu, Min Qian, Smooth Ergodic Theory of Random Dynamical Systems, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1995

[64] C. E. Shannon, A Mathematical Theory of Communication, Bell System Technical Journal, V. 27, n. 4, 1948, pp379～423, 623～656

[65] A. N. Kolmogorov, A New Metric Invariant of Transient Dynamical Systems and Automorphisms of Lebesgue Space, Doklady Akademii Nauk SSSR, 119(1958), 861～864

[66] G. Sinai, On the Concept of Entropy of a Dynamical System, Doklady Akademii Nauk SSSR, 124(1959), 768～771.

[67] P. R. Halmos, Measure Theory, Van Nostrand, 1950

[68] N. Kryloff, N. Bogoliouboff, Annals of Math., 38(1937), pp65～113.

[69] W. Goodwyn, Topological Entropy Bounds Measuretheoretic Entropy, Proc. AMS, 23 (1969), 679～688

[70] T. N. T. Goodman, Relating Topological Entropy and Measure Entropy, Bull. Lond. Math. Soc., 3(1971), pp176～180

[71] 严士健、王隽骧、刘秀芳,概率论基础,北京,科学出版社,1982

[72] G. D. Birkhoff, Proof of the Ergodic Theorem, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 17(1931), pp656～660

[73] J. F. C. Kingman, The Ergodic Theory of Subadditive Stochastic Processes, J. Royal Stat.

Soc. B30(1968), pp499～510

[74] J. F. C. Kingman, Subadditive Processes, in Springer Lect. Notes in Math., 539(1976)

[75] T. Liggett, Interacting Partial Systems, Springer-Verlag, 1985

[76] В. И. Оселедеч, Труды Московского МАте Матического Оъщества, 19(1968), pp179～210

[77] 王伯英,多重线代数基础,北京,北京师范大学出版社,1985

[78] 陆传务,林化夷,矢量和张量及其应用,武汉,华中工学院出版社,1983

[79] 胡虎翼,遍历定理、Ляпунов 特征指数,数学进展,15(1986),p113～129

[80] V. Guillemin, A. Pollack, Differential Topology, Prentice Hall, Inc., 1974

[81] M. Hirsch, Differential Topology, Springer-Verlag New York Inc., 1976

[82] Th. Bröcker, K. Jänich, Introduction to Differential Topology, Cambridge University Press, 1982

[83] H. Whitney, Differential Menifolds, Ann. of Math., 37(1936), pp654～680

[84] R. Engelking, Dimension Theory, 1978

[85] M. A. Kervaire, Comment, Math. Helv., 34(1960), pp257～270

[86] J. Milnor, Ann. of Math. 6(1956), pp399～405

[87] 熊金城,点集拓扑讲义,北京,高等教育出版社,1981

[88] W. Boothdy, An Introduction to Differentiable Manifelds and Riemannian Geometry, Academic Press, 1975

[89] J. M. Milnor, Differential Topology,熊金城译,从微分观点看拓扑,上海,上海科学技术出版社,1983

[90] 张筑生,微分拓扑讲义,北京,北京大学出版社,1996

[91] 张筑生,微分动力系统原量,北京,科学出版社,1987(第一版)

[92] 罗定军,滕利邦,微分动力系统导引,北京,高等教育出版社,1990

[93] 张锦炎,钱敏,微分动力系统导引,北京,北京大学出版社,1991

[94] Z. Nitecki, Differentiable Dynamics, M. I. T. Press, 1971

[95] M. Irwin, Smooth Dynamical Systems, Academic Press, 1980

[96] J. Palis and W. Melo, Geometric Theory of Dynamical Systems, An Introduction, Springer-Verlag, 1982

[97] M. Shub, Endomorphisms of Compact Differentiable Manifelds, Amer. J. Math., 91 (1969), pp175～199

[98] P. Hartman. On the Locol liuearization of differetial equations, Proc. AMS, 14(1963), 568～573

[99] P. Hartman. Ordinary differential equations, Wiley, 1964

[100] D. Grobman, Homeomorphisms of systems of differential equations, Doki. Akad. Nauk. SSSR, 128(1959)

[101] J. Palis, On the local structure of hyperbolic points in Banach spaces, An. Acad; Brasil; Cienc, 40(1968), 263～266

[102] C. Pugh, On a theorem of P. Hartman, Amer. J. Math., 91(1969), 363～367

[103] S. Stemberg, Amer. J. Math., 77(1955)526～534

[104] R. Abraham and J. Robbin, Transversal mappings and flows, Benjamin, New York 1967

[105] F. Riesz and B. Sz. Nagy, Lecons D'analyse Fouctionnelle, Budapest, 1965(中译本:庄万等译,泛出分析讲义,第二卷,科学出版社,1963)

[106] 陈文嫄,非线性泛函分析,郑州,甘肃人民出版社,1982

[107] A. B. Katok, Dynamical Systems with Hyperbolic Structure, Amer. Math. Soc. Transl., 116(1981), pp43～95

[108] A. Manning, Classification of Anosov Diffeomor phisms on Tori, Amer. J. Math., 96(1974), pp422～429

[109] M. Shub, Endomorphisms of Compact Differetial Manifolds, Awer. J. Math., 91 (1969), pp175～199

[110] J. N. Mather Characterization of Anosov Diffeomorphisms, Jndag, Math., 30(1968), pp479～482

[111] D. V. Anosov, A certain class of invariant sets of Smooth dynamical systems, Proc. Fifth Internat. Conf. Nonlinear Oscillations (kiev, 1969), Vol. 2, Izdanie Inst. Mat. Akad. Nauk. Ukrain, SSSR, Kiev, 1970, pp39～45 (Russian)

[112] R. Bowen, Markov Partition for Axiom A diffeomorphism, Amer. J. Math., 92(1970), pp725～747

[113] R. Bowen, On Axiom A diffeomorphisms, CBMS Regional Conference Series in Math., Vol. 35 AMS Publications: Providence, 1978

[114] S. Smale, The Ω-stabillity theorem, Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 14, Amer. Math. Soc., Providence, R. L., 1970, pp289～297

[115] M. Hirsch et al., Neighborhoods of hyporbolic sets, Invent. Math., 9 (1969/70), pp121～134

[116] I. Kypka, Contributions to Differential. Equations, 2(1963), 3(1964)

[117] M. Peixoto, Structural stability on two-dimensional manifolds, Topology, 1 (1962), pp101～120.

[118] J. Robbin, A structural stability theorem Ann. of Math., 94(1971), pp447～493.

[119] C. Robinson, Structural stability of C^1 diffeomorphisms, J. Diff. Equations, 22(1976), pp28～73

[120] S. Smale, The Ω-Stability theorem, Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., 14 (1970), pp289～297

[121] J. Palis and S. Smale, Structural stability theorems, Global Analysis Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 14, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970, pp223～231

[122] Liao Shantao(廖山涛), On the stability conjecture, Chinese Annuals of Math., 1 (1980), pp9～30

[123] J. Palis. On Morse-Smale dynamical systems, Topology, 8(1969), pp385～404

[124] S. Smale, Amer. J. Math., 88(1966), pp491～496

[125] S. New house, Nondensity of Axion $A(a)$ on S^2, Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math., Vol14 Amer. Math. Soc., Providence, R. I., (1970), pp191～202

[126] J. Palis, W. Melo, Geometric Theory of Dynamical Systems, An Introductiion, Springer-Verlag, 1982

[127] S. Smale, Ann. Scuola Nor male Superiore Pisa. 17(1963), pp97～116

[128] A. Dan kner, Ann. Math. 107(1978)

[129] A. Pazy, Semigroups of Linear Operator and Application to Partial Differenbial Equations, New York, Springer-Verlag, 1983

[130] Henry, D., Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics, Volume 840, Springer, 1981

[131] 叶其孝,李正元,反应扩散方程引论,科学出版社,1990

[132] R. E. Showalter, Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations, Pitman Publishing, 1977

[133] J. A. Goldstein, Semigroups of Linear Operators and Applications, Oxford University Press. New York, Clarendon Press, Oxford 1985

[134] 陈绥阳,互助竞争型差分方程组解的收敛性与渐近性质,高等学校计算数学学报, 4(1991), pp307～317

[135] 陈绥阳,郭本瑜,一类反应扩散差分方程组及有关的离散生态模型,应用数学与计算数学学报, Vol. 3, No. 1(1989), pp55～65

[136] Guo Benyu, Chen Suiyang, On Nonlinear Reaction Equation, Northeastern Math. J., 1986, 2(4), pp431～448

[137] Guo Benyu, A. R. Mitchell, Chen Suiyang, On a One-Dimensional Difference Scheme in Reaction Diffussion, J. C. M., 1987, 5(3), pp191～202

[138] Chen Suiyang, Guo Benyu, The Asymptotic Behavior and the Convergence of the Solution of a Reaction-Diffusion Difference Scheme in a Circular Region, J. C. M., 1987, 5 (4), pp346～375

[139] Chen Suiyang, Guo Benyu, A Discrete Model with Interaction Between the Bud worm and its Predator in a Circular Region, ACTA. Math. Appl., 1989, 5(4), pp318～331

[140] Guo Benyu, B. D. Sleeman, Chen Suiyang, On the Discrete Logistic Model of Biology, Applicable Analysis, Vol. 33, (1989)pp215～231

[141] P. Constantin, C. Foias, B. Nicolaenlco, R. Temam, Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations, Springer-Verlag New York, 1989

[142] R. Temam, Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Appl. Math. Sci. 68, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1988

[143] J. K. Hale, Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1988

[144] M. Marion, R. Teman, Nonlinear Galerkin Methods, SIAM J. Numer, Anal., 26(1989), pp1139～1157

[145] 戴正德,郭柏灵,惯性流形与近似惯性流形,北京,科学出版社,2000

[146] 郭柏灵,无穷维动力系统(上、下册),北京,国防工业出版社,2000

[147] P. Constantin, C. Foias. Navier-Stokes Equations. Chicago and London: The University of Chicago Press, 1988

[148] R. Courant, D. Hilbert. Methods of Mathematical Physics. New York: Intersciences Publishers, 1953

[149] C. Foias, O. Manley, R. Temam. Sur l'interaction des petits et grands trourbillons dans les écoulements turbulents. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 1987, 305, pp497～500

[150] C. Foias, O. Manley, R. Temam. On the interaction of small and large eddies in two-dimensional tuebulent flows. Math. Mod. Numer. Anal., 1988, 22, pp93～118

[151] C. Foias, O. Manley, R. Teman. Approximate inertial manifolds and effective viscosity in turbulent flows. Phys. Fluids A, 1991, 3, pp898～911

[152] C. Foias, G. Sell, R. Temam. Variétés inertielles des équations différentielles dissipatives. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 1985, 301, pp139～142

[153] C. Foias, G. Sell, R. Temam. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations. J. Diff. Equ., 1988, 73, pp309～353

[154] M. Kwak. Finite dimensional inertial form for the 2D-Navier-Stokes equations. Indiana Univ. Math. J., 1993, 41, pp927～981

[155] M. Marion, R. Temam. Nonlinear Galerkin methods: the finite elements case. Numer. Math., 1989, 57, pp205～226

[156] M. Marion, R. Temam. Navier-Stokes Equations: Theory and Approximation. In: P. G. Ciarlet, J. L. Lions (eds), Handbook of Numerical Analysis. Vol VI. Amsterdam: Elsevier Sciences, 1998, pp503～688

[157] G. Métivier. Valeurs propres d'opérateurs définis sur la restriction de systémes variationnels à des sous-espaces. J. Math. Pures Appl., 1978, 57, pp133～156

[158] R. Temam. Dynamical systems in infinite dimension. Contemporary Mathematics, 1989, 99, pp1～26

[159] R. Temam. Inertial manifolds. Math. Intelligencer, 1990, 12(4), pp68～74

[160] R. Temam. Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Second Edition. Philadelphia: SIAM, 1995

[161] R. Temam, S. Wang. Inertial forms of Navier-Stokes equations on the sphere. J. Funct. Anal., 1993, 117, pp215～242

[162] 伍渝江．关于近似惯性流形及其数值方法的研究．力学进展,1994,24(2),pp145～153

[163] Y.J.Wu. A nonlinear Galerkin method with variable modes for Kuramoto-Sivashinsky equation. J.Comput. Math., 1999, 17(3), pp243～256

[164] Y.J.Wu, B.Y.Guo. Localization and approximation of attractors for the Kuramoto-Sivashinsky equations. Acta Math. Sci., 2000, 20 B(2), pp145～154

[General Information]
书名=动力系统基础及其方法
作者=陈绥阳　褚蕾蕾编著
页数=322
SS号=10987819
DX号=
出版日期=2002年09月第1版
出版社=科学出版社